MOVIMIENTOS EN ESPACIOS AFINES EUCLÍDEOS. CLASIFICACIÓN

MARÍA J. VALE GONSALVES

1. Introducción

Los movimientos de un espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ son las aplicaciones del espacio $\mathbb{A}$ en sí mismo, que conservan las distancias entre los puntos; algebraicamente, son las aplicaciones afines cuya aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal. El objetivo de este trabajo es clasificar los movimientos de los espacios afines euclídeos de dimensiones 2 y 3; para ello estudiaremos la clasificación de las transformaciones ortogonales de los correspondientes espacios vectoriales euclídeos. La clasificación de los movimientos del espacio tridimensional fue dada en 1776 por Leonard Euler y la clasificación de los movimientos del plano, que es mas sencilla, fue dada en 1831 por Michel Chasles.

2. Espacio afín

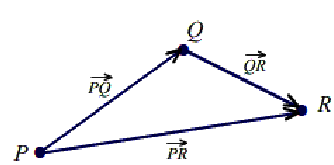
Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Con el objetivo de definir el concepto de espacio afín sobre V, en esta sección vamos a generalizar las propiedades de los puntos y los vectores libres de la geometría elemental mediante axiomas. En este contexto, las variedades lineales generalizan los conceptos de recta y plano del espacio ordinario.

Definición 2.1. Un *espacio afín* sobre V es una terna $(\mathbb{A}, V, \rightarrow)$, formada por un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, un conjunto $\mathbb{A}$ cuyos elementos se llaman *puntos*, y una operación externa:

$$\begin{array}{rcl} \rightarrow : \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \longrightarrow & V \\ (P\ ,\ Q) & \longmapsto & \overrightarrow{PQ}\,, \end{array}$$

donde denotamos por $\overrightarrow{PQ}$ o también por $\overrightarrow{P,Q}$, la imagen por la aplicación $\rightarrow$ del par (P, Q), y que verifica los siguientes axiomas:

1. Relación de Chasles: Para cualesquiera puntos $P, Q, R \in \mathbb{A}$, se verifica $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.



2. Para cada punto $P \in \mathbb{A}$ y cada vector $v \in V$ existe un único punto Q, que denotaremos por $P+v$, tal que $\overrightarrow{PQ} = v$.

En general denotaremos el espacio afín $(\mathbb{A}, V, \rightarrow)$ por $\mathbb{A}$.

2.2. Propiedades Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Se tiene

(1) $P + \overrightarrow{PQ} = Q$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

(2) $\overrightarrow{PP} = 0$ para todo $P \in \mathbb{A}$.

(3) $\overrightarrow{PQ} = 0 \Longleftrightarrow Q = P$.

(4) $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

(5) Relación del paralelogramo: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RT} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QT}$

(6) $P + (u+v) = (P+u) + v$, para todo $P \in \mathbb{A}$ y para todo $u, v \in V$.

(7) P+0=P, para todo $P \in \mathbb{A}$.

Definición 2.3. Sea A un punto de $\mathbb{A}$ y sea U un subespacio de V. Se llama *variedad lineal* de $\mathbb{A}$ que pasa por A y con dirección U al conjunto

$$\{ A + u \mid u \in U \},$$

que denotaremos por $A + U$.

Obsérvese que $\mathbb{A}$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$. En efecto, $\mathbb{A} = A + V$, para todo $A \in \mathbb{A}$.

Ejemplos 2.4. (1) El conjunto de los puntos del plano (espacio) ordinario, junto con el espacio vectorial de los vectores libres del plano (espacio) y con la aplicación que lleva cada par de puntos P, Q del plano (espacio) al vector libre $[\overrightarrow{PQ}]$ con representante el vector $\overrightarrow{PQ}$, forman un espacio afín.

(2) Sea V un espacio vectorial sobre K. La terna $(V, V, \rightarrow)$, donde para cualesquiera $P, Q \in V$, $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, es un espacio afín. Este espacio afín se llama el *espacio afín* de V; lo denotaremos por V.

(3) Sean $(A, V, \rightarrow)$ un espacio afín y $L = A + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Dado que si $P, Q \in L$ entonces $\overrightarrow{PQ} \in U$, la terna $(L, U, \rightarrow)$, donde $\rightarrow : L \times L \longrightarrow U$ es la aplicación inducida por $\rightarrow : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$, es un espacio afín sobre U.

Definición 2.5. Se llama *dimensión* del espacio afín $(\mathbb{A}, V, \rightarrow)$ a la dimensión de V como espacio vectorial sobre K.

Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín de dimensión finita y $L = A + U$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, dado que L es un espacio afín sobre U, $\dim L = \dim_K U$.

Definición 2.6. Se llaman *rectas* y *planos* a las variedades lineales de dimensiones 1 y 2, respectivamente. Si la dimensión de $\mathbb{A}$ es n, se llaman *hiperplanos* de $\mathbb{A}$ a las variedades lineales de dimensión $n-1$. Si la variedad lineal L tiene dimensión 0, entonces $L = A + \{0\} = \{A\}$.

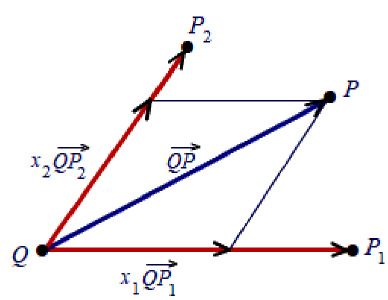
Observación 2.7. En este trabajo una *base* de un espacio vectorial V de dimensión n es una n-pla $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ tal que $v_1, \ldots, v_n$ son vectores linealmente independientes y que por tanto generan V.

Definición 2.8. Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín de dimensión n y $P_1, \ldots, P_n, Q$ son puntos de $\mathbb{A}$. Se dice que la $(n+1)$-pla $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ es una *referencia* $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ si $(\overrightarrow{QP_1}, \ldots, \overrightarrow{QP_n})$ es una base de V. Escribiremos $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ y diremos que Q es el *origen* y $B_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{QP_1}, \ldots, \overrightarrow{QP_n})$ es la *base asociada* a $\mathcal{R}$.

Definición 2.9. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y sea $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia afín de $\mathbb{A}$. Se llaman *coordenadas afines* del punto $P \in \mathbb{A}$ en la referencia $\mathcal{R}$ a la n-pla $(x_1, \ldots, x_n)$ de coordenadas del vector $\overrightarrow{QP}$ en la base $B_{\mathcal{R}}$, es decir a la n-pla $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tal que

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overrightarrow{QP_i}$$

El siguiente dibujo ilustra esta definición en el caso $n = 2$.



Ejemplos 2.10. (1) En la referencia canónica $\mathcal{C} = \{(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1); (0, \ldots, 0)\}$ de K^n, el punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$.

(2) En la referencia $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, -1); (-2, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$, el punto $P = (2, 0)$ tiene coordenadas $(2, -1)$.

Definición 2.11. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K y $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre V y V', respectivamente. Se dice que la aplicación $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es *afín* si existe una aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P')} = f(\overrightarrow{P\,P'}), \quad \forall\, P, P' \in \mathbb{A}$$

La aplicación lineal f se dice que es una *aplicación lineal asociada* a α.

Lema 2.12. *Toda aplicación afín tiene una única aplicación lineal asociada.*

Demostración. Sea $f, g : V \to V'$ aplicaciones lineales asociadas a la aplicación afín $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$. Se tiene

$$f(v) = f(\overrightarrow{P, P+v}) = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+v)} = g(\overrightarrow{P, P+v}) = g(v), \quad \forall\, v \in V. \qquad \square$$

Ejemplos 2.13. (1) Si $\alpha\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ y $\beta\colon \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$ son aplicaciones afines, entonces $\beta \circ \alpha$ es una aplicación afín.

(2) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. La aplicación traslación de $\mathbb{A}$ por el vector $v \in V$, $t_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, dada por $t_v(P) = P + v$, es una aplicación afín con aplicación lineal asociada 1_V. En efecto, por la relación del paralelogramo

$$\overrightarrow{P, P+v} = v = \overrightarrow{P', P'+v} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{P\,P'} = \overrightarrow{P+v, P'+v}.$$

Las traslaciones de $\mathbb{A}$ forman un grupo con la operación composición que denotaremos por $T(\mathbb{A})$.

(3) Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Sea A un punto de $\mathbb{A}$, A' un punto de $\mathbb{A}'$ y $f\colon V \to V'$ una aplicación lineal. La aplicación $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ dada por $\alpha(P) = A' + f(\overrightarrow{AP})$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es f.

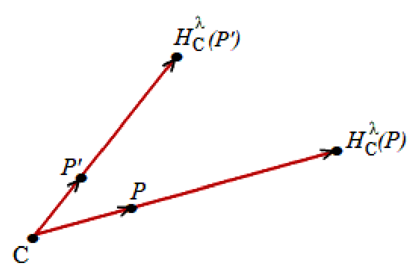
En efecto,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P')} &= \overrightarrow{A' + f(\overrightarrow{AP}), A' + f(\overrightarrow{AP'})} = \overrightarrow{A' + f(\overrightarrow{AP}), A'} + \overrightarrow{A', A' + f(\overrightarrow{AP'})} \\ &= f(\overrightarrow{PA}) + f(\overrightarrow{AP'}) = f(\overrightarrow{PP'}), \quad \forall P, P' \in \mathbb{A}.\end{aligned}$$

(4) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V, C un punto de $\mathbb{A}$ y $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Por el ejemplo (3), la aplicación

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{C}}^{\lambda} : \mathbb{A} &\to \mathbb{A} \\ P &\rightsquigarrow \mathrm{C} + \lambda\, \overrightarrow{\mathrm{C}\,P} \end{aligned}$$

es una aplicación afín; esta aplicación se denomina *homotecia* de *centro* C y *razón* λ.



(5) Sean V y V' espacios vectoriales sobre K y sea $f\colon V \to V'$ una aplicación lineal. La aplicación f considerada como aplicación del espacio afín de V al espacio afín de V' es una aplicación afín. En efecto, basta tomar en el ejemplo (3), $A = A' = 0$.

(6) Si V y V' son espacios vectoriales, $v' \in V'$ y $f\colon V \to V'$ es una aplicación lineal entonces $t_{v'} \circ f$ es una aplicación afín, por ser composición de aplicaciones afines. Recíprocamente, si $\alpha\colon V \to V'$ es una aplicación afín del espacio afín de V al espacio afín de V', entonces existe un vector $v' \in V'$ y una aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $\alpha = t_{v'} \circ f$. En efecto, sea $f : V \to V'$ la aplicación lineal asociada a α. Se tiene

$$\alpha(P) - \alpha(0) = \overrightarrow{\alpha(0), \alpha(P)} = f(\overrightarrow{0P}) = f(P), \quad \forall\, P \in \mathbb{A}.$$

Así, $\alpha = t_{v'} \circ f$, con $v' = \alpha(0)$.

2.14. Lema. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es $1_V : V \to V$, entonces α es una traslación.

Demostración. Se tiene

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P')} = \overrightarrow{PP'}, \quad \forall\, P, P' \in \mathbb{A},$$

y por la relación del paralelogramo

$$\overrightarrow{P, \alpha(P)} = \overrightarrow{P', \alpha(P')}, \quad \forall\, P, P' \in \mathbb{A}.$$

Pongamos $v = \overrightarrow{P, \alpha(P)}$ para cualquier $P \in \mathbb{A}$. Se tiene

$$\alpha(P) = P + \overrightarrow{P, \alpha(P)} = P + v = t_v(P), \quad \forall\, P \in \mathbb{A}. \qquad \square$$

3. Espacios vectoriales euclídeos

En esta sección se introduce el concepto de producto escalar en un espacio vectorial real. Los espacios vectoriales euclídeos generalizan el espacio de los vectores libres del plano con su producto escalar usual. Se define el concepto de ortogonalidad y se prueba que existen bases ortonormales. Se estudian las transformaciones ortogonales y se clasifican en dimensiones 2 y 3.

Definición 3.1. Sea V un espacio vectorial real. Un *producto escalar* en V es una aplicación $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ que verifica

(1) σ es una *forma bilineal*:

$$\sigma(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \sigma(v_1, w) + \lambda_2 \sigma(v_2, w),\ \forall\, v_1, v_2, w \in V,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
$$\sigma(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \sigma(v, w_1) + \lambda_2 \sigma(v, w_2),\ \forall\, v, w_1, w_2 \in V,\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) σ es *simétrica*, es decir $\sigma(v, w) = \sigma(w, v)$, para todo $v, w \in V$,

(3) σ es *definida positiva*:

$$\sigma(v, v) > 0, \quad \forall\ v \in V, \quad v \neq 0.$$

Denotaremos $\sigma(u,v)$ por $u \cdot v$ y $v \cdot v$ por v^2.

Un *espacio vectorial euclídeo* es un espacio vectorial real con un producto escalar.

La aplicación $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$\sigma((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$ que llamaremos *producto escalar usual*. Así, $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual es un espacio vectorial euclídeo.

Todo subespacio de un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial euclídeo con el producto escalar inducido.

Definición 3.2. Sea V un espacio vectorial euclídeo y v un vector de V. Se llama *norma* o *longitud* del vector v, y se denota por $\parallel v \parallel$, al número real

$$\parallel v \parallel = \sqrt{v^2}.$$

Se dice que un vector v es *unitario* si $\parallel v \parallel = 1$.

Definición 3.3. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se dice que la base $B = (v_1,\ldots,v_n)$ de V es *ortogonal* si $v_i \cdot v_j = 0$, para todo $i \neq j$. Se dice que la base $B = (v_1,\ldots,v_n)$ es *ortonormal*, si es ortogonal y los vectores v_i , $i = 1,\ldots,n$, son unitarios, o equivalentemente si $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$, y $\delta_{ij} = 1$, si $i = j$.

La base canónica $C = (e_1 = (1,\ldots,0)\ \ldots, e_n = (0,\ldots,1))$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

Definición 3.4. Sea V un espacio vectorial euclídeo y sea U un subespacio de V. El subespacio

$$U^\perp = \{v \in V \mid \sigma(u,v) = 0, \forall\, u \in U\}$$

se llama *complemento ortogonal* de U.

Definición 3.5. Sea (V,σ) es un espacio vectorial euclídeo. Se dice que el subespacio U de V es *ortogonal* al subespacio W de V si $\forall\, u \in U$, $\forall\, w \in W$, $u \cdot w = 0$.

Definición 3.6. Sea V un espacio vectorial euclídeo y sean U y W subespacios de V . Se dice que la suma $U + W$ es una *suma ortogonal* y se denota por $U \perp W$, si verifica que $U \cap W = \{0\}$ y U es ortogonal a W.

Teorema 3.7. *Todo espacio vectorial euclídeo de dimensión finita tiene bases ortonormales.*

Demostración. Razonamos por inducción sobre la dimensión. Si el espacio vectorial euclídeo tiene dimensión 1 y v es un vector unitario, (v) es una base ortonormal de V.

Supongamos que el resultado es cierto para espacios vectoriales euclídeos de dimensión $n-1 \geq 1$. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión $n \geq 2$ y $v_1 \in V$ un vector unitario. Veamos que $V = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_1 \rangle^\perp$. En efecto, si $v \in V$ y $w = v - (v \cdot v_1)\, v_1$, entonces

$$w \cdot v_1 = v \cdot v_1 - (v \cdot v_1)\,(v_1 \cdot v_1) = 0,$$

es decir, $w \in \langle v_1 \rangle^\perp$. Así, $V = \langle v_1 \rangle + \langle v_1 \rangle^\perp$. Como el producto escalar en V es definido positivo, $\langle v_1 \rangle \cap \langle v_1 \rangle^\perp = \{0\}$.

Por hipótesis de inducción, existe una base ortonormal $(v_2,\ldots,v_n)$ de $\langle v_1 \rangle^\perp$ y entonces $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ es una base ortonormal de V. $\square$

Proposición 3.8. *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y sea U un subespacio de V. Entonces $V = U \perp U^{\perp}$.*

Demostración. Dado que el producto escalar en V es definido positivo, $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. Sea $B = (v_1, \ldots, v_r)$ una base ortonormal de U. Si $v \in V$ y consideramos los vectores

$$u = (v \cdot v_1)\, v_1 + \ldots + (v \cdot v_r)\, v_r, \quad w = v - u,$$

entonces $u \in U$ y además, para cada $i = 1, \ldots, r$

$$w \cdot v_i = v \cdot v_i - u \cdot v_i = v \cdot v_i - v \cdot v_i = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Así, $w \in U^{\perp}$ y entonces $V = U + U^{\perp}$. □

Definición 3.9. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y U un subespacio de V. Si $v \in V$ se llama proyección ortogonal de v sobre U al vector $u \in U$ tal que $v - u \in U^{\perp}$.

Obsérvese que dado que $V = U \perp U^{\perp}$, para cada $v \in V$, existen un único $u \in U$ y un único $w \in U^{\perp}$ tales que $v = u + w$. El vector u es la proyección ortogonal de v sobre U. Denotaremos la proyección ortogonal de v sobre U por $p_U(v)$ o por $p(v)$.

Definición 3.10. Sea V un espacio vectorial sobre K, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Si $f \colon V \to V$ es una aplicación K-lineal y

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, v_j,\ i = 1, \ldots, n,$$

la matriz

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

se llama *matriz asociada a f respecto* a la base B.

Definición 3.11. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Se dice que $f : V \to V$ es una *transformación ortogonal* de V si f es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal y verifica

$$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w, \quad \forall\, v, w \in V.$$

Si f es una transformación ortogonal de V, entonces f es un isomorfismo de espacios vectoriales reales. En efecto, si $v \in V$ es tal que $f(v) = 0$, entonces $0 = f(v) \cdot f(v) = v^2$ y por ser el producto escalar en V definido positivo, entonces $v = 0$.

Si $B = (v_1, \ldots v_n)$ una base de V y $f \colon V \to V$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal se tiene que f es una transformación ortogonal si, y solo si, $v_i \cdot v_j = f(v_i) \cdot f(v_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Lema 3.12. *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f una transformación ortogonal de V. Se tiene*
$$\mathrm{Im}(f - 1_V) = (\mathrm{Nuc}(f - 1_V))^{\perp}.$$

Demostración. Para cada $(f - 1_V)(v) \in \mathrm{Im}(f - 1_V)$ y cada $w \in \mathrm{Nuc}(f - 1_V)$ se tiene,

$$(f - 1_V)(v) \cdot w = (f(v) - v) \cdot w = f(v) \cdot w - v \cdot w = f(v) \cdot f(w) - v \cdot w = 0.$$

Así, $\mathrm{Im}(f - 1_V) \subset (\mathrm{Nuc}(f - 1_V))^{\perp}$ y dado que,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f - 1_V) = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Nuc}(f - 1_V) = \dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Nuc}(f - 1_V))^{\perp},$$

se obtiene el resultado. $\square$

Definición 3.13. Se dice que la matriz $a \in M_n(\mathbb{R})$ es una *matriz ortogonal* si $a^t\, a = I$, siendo a^t la matriz traspuesta de a o equivalentemente si $a^{-1} = a^t$.

Las matrices $n \times n$ ortogonales reales forman un grupo con la operación producto de matrices que denotaremos por $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$.

Si a es una matriz ortogonal, entonces $(\det a)^2 = \det a \det a^t = \det I = 1$. Así, $\det a = 1$ o $\det a = -1$. Denotaremos por $\mathcal{O}^+(n, \mathbb{R})$ el subgrupo de $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ formado por las matrices ortogonales de determinante 1. Denotaremos por $\mathcal{O}^-(n, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices de $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ de determinante -1

Teorema 3.14. *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y B una base ortonormal de V. Una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $f\colon V \to V$ es una transformación ortogonal si, y sólo si, la matriz asociada a f respecto a la base B es ortogonal.*

Demostración. Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ortonormal de V y sea $f_B = (a_{ij})$. Se tiene

$$f(v_i) \cdot f(v_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k) \cdot (\sum_{l=1}^{n} a_{lj} v_l) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj}\, v_k \cdot v_l = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot a_{kj}.$$

La aplicación f es una transformación ortogonal si, y sólo si, $f(v_i) \cdot f(v_j) = v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$, con $i, j = \{1, \ldots, n\}$, o equivalentemente si $f_B^t \cdot f_B = I$. $\square$

Definición 3.15. Sean $B = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ bases de un espacio vectorial V y sea
$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, v_j,\ i = 1, \ldots, n.$$

La matriz

$$1_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

se llama *matriz de cambio de base* de B' a B.

Lema 3.16. *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, B una base ortonormal de V y B' una base de V. Se tiene que B' es una base ortonormal de V si, y solo si, $1_{B'B}$ es una matriz ortogonal.*

Demostración. Sean $B = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$. Consideremos la aplicación $\mathbb{R}$-lineal dada por

$$\begin{aligned} f : V &\to V \\ v_i &\rightsquigarrow v'_i, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Se tiene que $f_B = 1_{B'B}$. La base B' es ortonormal si, y solo si, $f(v_i) \cdot f(v_j) = \delta_{ij} = v_i \cdot v_j$, con $i, j = \{1, \ldots, n\}$, es decir si $f \in \mathcal{O}(V)$, lo cual por el teorema 3.14 es equivalente a que $1_{B'B} = f_B \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. □

Definición 3.17. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ una aplicación K-lineal. De llama determinante de f y se denota por $\det f$ al determinante de la matriz asociada a f respecto a una base cualquiera de V.

Obsérvese que $\det f$ no depende de la base de V considerada. En efecto, si B' es otra base de V, entonces $f_{B'} = P^{-1} f_B P$ donde $P = 1_{B'B}$. Así, $\det f_{B'} = \det P \det f_B \det P = \det f_B$.

Corolario 3.18. *Si f es una transformación ortogonal de V, entonces el determinante de f es 1 o -1.*

Demostración. Sea B una base ortonormal de V. Por el teorema 3.14, la matriz f_B es ortogonal. Así, $\det f = \det f_B = \pm 1$. □

Definición 3.19. Sea f una transformación ortogonal de V. Se dice que f es un *giro* o una *rotación* si $\det f = 1$. Se dice que f es una *reflexión* si $\det f = -1$.

Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita denotaremos por $\mathcal{O}(V)$ el grupo de las transformaciones ortogonales de V con la operación composición, por $\mathcal{O}^+(V)$ el subgrupo de los giros y por $\mathcal{O}^-(V)$ el conjunto de las reflexiones. Si B es una base ortonormal de V, entonces la aplicación

$$\Phi_B : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$$

dada por $\Phi_B(f) = f_B$, es un isomorfismo de grupos; además, $f \in \mathcal{O}^+(V)$ si, y solo si, $f_B \in \mathcal{O}^+(n, \mathbb{R})$ y $f \in \mathcal{O}^-(V)$ si, y solo si, $f_B \in \mathcal{O}^-(n, \mathbb{R})$.

Proposición 3.20. *Sea V un plano vectorial euclídeo y sea B una base ortonormal de V, Se tiene*

$$(1) \quad f \in \mathcal{O}^+(V) \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \mid f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad f \in \mathcal{O}^-(V) \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \mid f_B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Demostración. (1) Sea

$$f_B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

La condición $f_B^t\, f_B = I$ es equivalente a las condiciones

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a\,c + b\,d = 0, \quad c^2 + d^2 = 1.$$

La condición de que el determinante de f es 1 es equivalente a que $ad - bc = 1$. Se tiene que $c = -b$ y $d = a$.

(2) Se prueba de forma análoga a (1). $\square$

Corolario 3.21. *Sea V un plano vectorial euclídeo. Si $f \in \mathcal{O}^+(V)$ y la matriz asociada a f respecto a una base ortonormal B es la de la proposición anterior, entonces las raíces del polinomio característico de f son $a \pm bi$ con $a^2 + b^2 = 1$. Si $f \in \mathcal{O}^-(V)$ entonces los autovalores de f son 1 y -1.*

Demostración. Si $f \in \mathcal{O}^+(V)$, entonces el polinomio característico de f es $X^2 - 2aX + 1$ y sus raíces son $a \pm bi$. Si $f \in \mathcal{O}^-(V)$ entonces el polinomio característico de f es $X^2 - 1$ y sus raíces son 1 y -1. $\square$

Proposición 3.22. *Si V es un plano vectorial euclídeo, el grupo $\mathcal{O}^+(V)$ es abeliano.*

Demostración. $\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$ es un grupo abeliano:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$ $\square$

Definición 3.23. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Se dice que las bases B y B' tienen *igual orientación* si el determinante de la matriz de cambio de base $1_{B\,B'}$ es positivo; en caso contrario se dice que tienen distinta orientación.

La relación "tener la misma orientación" en el conjunto de bases de V es una relación de equivalencia. Existen solamente dos clases de equivalencia distintas para esta relación. Si B es una base de V la clase de equivalencia $[B]$ se dice que es una orientación sobre V.

El par $(V, [B])$ se llama espacio vectorial orientado. Diremos que V está orientado con la base B para indicar que consideramos $(V, [B])$ y en este caso las bases de [B] se dice que son bases de V de orientación positiva y las bases de V que no están en $[B]$ se dice que son bases de orientación negativa. Consideramos que $\mathbb{R}^n$ está orientado con la base canónica.

Proposición 3.24. *Sea V un plano vectorial euclídeo y $f \in \mathcal{O}^+(V)$. Si B y B' son bases ortonormales de V de igual orientación entonces, $f_B = f_{B'}$.*

Demostración. Dado que B y B' son bases ortonormales, por el lema 3.16, $1_{B'B} \in \mathcal{O}(2, \mathbb{R})$, y dado que B y B' tienen la misma orientación $1_{B'B} \in \mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$. Dado que $f_B, f_{B'} \in \mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$ se tiene

$$f_{B'} = 1_{BB'}\, f_B\, 1_{B'B} = 1_{BB'}\, 1_{B'B}\, f_B = f_B.$$ $\square$

Observación 3.25. Sea V un plano vectorial euclídeo y sea $f \in \mathcal{O}^+(V)$. Si B y B' son bases ortonormales de V de distinta orientación entonces

$$f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad f_{B'} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a^2 + b^2 = 1$. En efecto si $B = (v_1, v_2)$ y $B'' = (v_2, v_1)$. entonces $f_{B'} = f_{B''}$.

Definición 3.26. Los elementos del grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ con la operación adición se llaman *ángulos orientados.*

Por definición, un ángulo orientado es un subconjunto de $\mathbb{R}$ de la forma

$$\varphi + 2\pi\mathbb{Z} = \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

para algún $\varphi \in \mathbb{R}$. Cada ángulo tiene un único elemento φ_0, $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ con el que con frecuencia lo identificaremos. Existe una biyección entre el conjunto $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ y el intervalo semiabierto $[0, 2\pi)$.

Proposición 3.27. *Sea V un plano vectorial euclídeo orientado. Se tiene el isomorfismo de grupos:*

$$\begin{aligned} G\colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathcal{O}^+(V) \\ \varphi + 2\pi\mathbb{Z} &\longmapsto G_\varphi \end{aligned}$$

donde G_φ es la transformación ortogonal de V cuya matriz asociada respecto a cualquier base ortonormal de V de orientación positiva es

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Demostración. Puesto que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π, si $\varphi + 2\pi\mathbb{Z} = \phi + 2\pi\mathbb{Z}$, equivalentemente si $\varphi - \phi \in 2\pi\mathbb{Z}$, entonces $G_\varphi = G_\phi$. La aplicación G es biyectiva, puesto que para $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ existe un único $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\varphi_0$ y $b = \operatorname{sen}\varphi_0$ ([5, Ch. IV, Theorem 9]). Además, G es un homomorfismo de grupos dado que $G_\varphi \circ G_\phi = G_{\varphi+\phi}$. □

Definición 3.28. Sea V un plano vectorial euclídeo orientado y $f \in \mathcal{O}^+(V)$. Se llama *ángulo del giro* f al ángulo orientado $\varphi + 2\pi\mathbb{Z}$ tal que $f = G_\varphi$, o también al número real $\varphi \in [0, 2\pi)$ tal que $f = G_\varphi$.

Proposición 3.29. *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y U_1 y U_2 son subespacios de V tales que $V = U_1 \perp U_2$. Si $f_1 \in \mathcal{O}(U_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(U_2)$, entonces la aplicación:*

$$f_1 \perp f_2 : V \longrightarrow V$$

dada por $(f_1 \perp f_2)(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$, para todo $u_1 \in U_1$ y todo $u_2 \in U_2$, es una transformación ortogonal de V.

Demostración. Es inmediata. □

Definición 3.30. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y H un hiperplano vectorial de V, es decir un subespacio de V de dimensión $n - 1$. Se llama *simetría respecto* a H a la transformación ortogonal

$$S_H = 1_H \perp -1_{H^\perp}.$$

El conjunto de vectores fijos de S_H es H y $S_H^{-1} = S_H$.

Proposición 3.31. *Si H es un hiperplano vectorial de V, entonces S_H es una reflexión.*

Demostración. Sea $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ una base de H y $H^\perp = \langle v_n \rangle$. Pongamos $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Se tiene que $\det S_H = -1$, puesto que la matriz asociada a S_H respecto a la base B es la matriz

$$\mathrm{diag}(1 \overset{n-1)}{\ldots} 1 - 1).$$

□

Teorema 3.32. *Sea V un plano vectorial euclídeo y $f \in \mathcal{O}^-(V)$, entonces existe una base ortonormal de V tal que la matriz asociada a f respecto a esa base es la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, f es la simetría respecto al subespacio $\mathrm{Nuc}(f - 1_V)$.

Demostración. Por el corolario 3.21, los autovalores de f son 1 y -1. Sea v un vector propio asociado a 1 y w un vector propio asociado a -1. Por ser f una transformación ortogonal, se tiene

$$v \cdot w = f(v) \cdot f(w) = -v \cdot w \implies v \cdot w = 0,$$

y entonces v y w son linealmente independientes. Sea $v_1 = v/ \parallel v \parallel$ y $v_2 = w/ \parallel w \parallel$. Se tiene que $B = (v_1, v_2)$ es una base ortonormal de V y

$$f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $f = S_{\langle v_1 \rangle}$ y $\langle v_1 \rangle = \mathrm{Nuc}(f - 1_V)$. □

3.33. Corolario. Sea V un plano vectorial euclídeo y sea f una transformación ortogonal de V. Se tiene

(1) Si $f \neq 1_V$ es un giro, entonces el único vector fijo de f es el cero.

(2) Si f es una reflexión, entonces el subespacio de vectores fijos de V tiene dimensión 1.

Lema 3.34. *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f una transformación ortogonal de V. Si U es un subespacio invariante por f, entonces tambien lo es $U^\perp$.*

Demostración. Veamos que si $f(U) = U$, entonces $f(U^\perp) = U^\perp$. En efecto, para cada $u \in U$ y cada $w \in U^\perp$ se tiene

$$u \cdot f(w) = f(f^{-1}(u)) \cdot f(w) = f^{-1}(u) \cdot w = 0.$$

□

Lema 3.35. *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f una transformación ortogonal de V. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de f, entonces $\lambda = \pm 1$.*

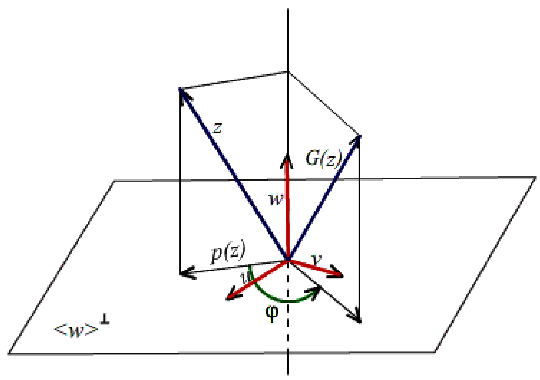
Demostración. Si v es un vector propio de f asociado al autovalor λ, entonces $f(v) = \lambda v$. Se tiene

$$v \cdot v = f(v) \cdot f(v) = (\lambda v) \cdot (\lambda v) = \lambda^2 v \cdot v,$$

y dado que $v \cdot v \neq 0$ entonces $\lambda^2 = 1$. □

Definición 3.36. Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y $w \in V$, $w \neq 0$. Se llama *giro de eje* $\langle w \rangle$ y *ángulo* φ a la transformación ortogonal si $G_\varphi \perp 1_{\langle w \rangle}$, donde G_φ es el giro de ángulo φ en el plano euclídeo orientado $\langle w \rangle^\perp$.

En la práctica cuando V está orientado se llama *giro de eje orientado* $\langle w \rangle$ y *ángulo* φ, a la transformación ortogonal $G_{\langle w \rangle, \varphi} = G_\varphi \perp 1_{\langle w \rangle}$, donde el plano $\langle w \rangle^\perp$ está orientado por una base (u, v) tal que la base (u, v, w) es de orientación positiva.



$G\,(z) := G_{<w>,\,\varphi}(z)$

Teorema 3.37. (Clasificación de las transformaciones ortogonales de un espacio vectorial euclídeo tridimensional) *Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y $f\colon V \to V$ una transformación ortogonal. Existe una base ortonormal B de V tal que la matriz asociada a f respecto a B es una de las siguientes matrices*

$$(i) \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (ii) \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

con $a^2 + b^2 = 1$.

Demostración. Dado que el polinomio característico de f tiene grado 3 entonces tiene una raíz real λ. Por el lema 3.35, $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Si v un vector propio unitario asociado a 1 o a -1, entonces dado que $f\langle v \rangle = \langle v \rangle$, por el lema 3.34, $f(\langle v \rangle^\perp) = \langle v \rangle^\perp$. Así, $f = f_{|\langle v \rangle^\perp} \perp 1_{\langle v \rangle}$ o $f = f_{|\langle v \rangle^\perp} \perp -1_{\langle v \rangle}$.

Si $f_{|\langle v \rangle^\perp}$ es un giro y (v_1, v_2) es una base ortonormal de $\langle v \rangle^\perp$, entonces por la proposición 3.20, la matriz asociada a f respecto a la base (v_1, v_2, v) es de la forma (i) o (ii).

Si $f_{|\langle v \rangle^\perp}$ es una reflexión entonces, por el teorema 3.32, existe una base ortonormal (w_1, w_2) de $\langle v \rangle^\perp$ tal que la matriz asociada a $f_{|\langle v \rangle^\perp}$ respecto a (w_1, w_2) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y en este caso si $f = f_{|\langle v \rangle^\perp} \perp 1_{\langle v \rangle}$, entonces la matriz asociada a f respecto a la base (w_1, v, w_2) es la matriz (ii) con $a = 1$, y si $f = f_{|\langle v \rangle^\perp} \perp -1_{\langle v \rangle}$, entonces la matriz asociada a f respecto a la base (w_2, v, w_1) es la matriz (i) con $a = -1$. $\square$

Observación 3.38. Supongamos que en el teorema anterior $B = (v_1, v_2, v_3)$. En el caso (i), f es un giro. Si $a = 1$, entonces $f = 1_V$. Si $a \neq 1$, entonces los autovalores de f son 1 y $a \pm bi \neq 1$, con $a^2 + b^2 = 1$; en este caso, f es un giro de eje orientado $\mathrm{Nuc}(f - 1_{\mathbb{R}^3}) = \langle v_3 \rangle$. Si B es una base de orientación positiva, el ángulo φ de f es tal que $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = b$ y si B es una base de orientación negativa, el ángulo φ de f es tal que $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = -b$.

En el caso (ii), f es una reflexión. Si $a = -1$, entonces $f = -1_V$. Si $a = 1$, entonces f es la simetría respecto al subespacio $\mathrm{Nuc}(f - 1_V) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si $a \neq \pm 1$, los autovalores de f son -1 y $a \pm bi \neq 1$, con $a^2 + b^2 = 1$; en este último caso f es la composición de un giro de eje orientado $\mathrm{Nuc}(f + 1_V) = \langle v_3 \rangle$ y la simetría respecto al subespacio $\mathrm{Nuc}(f + 1_V)^{\perp} = \langle v_1, v_2 \rangle$. Si la base B es de orientación positiva, entonces el ángulo φ del giro es tal que $\cos\varphi = a$, $\operatorname{sen}\varphi = b$ y si la base B es de orientación positiva, entonces el ángulo φ del giro es tal que $\cos\varphi = a$, $\operatorname{sen}\varphi = -b$.

Corolario 3.39. *Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y sea f una transformación ortogonal de V. Se tiene:*

(1) *Si el conjunto de vectores fijos de f es un subespacio de dimensión 1, entonces f es un giro de eje ese subespacio.*

(2) *Si el conjunto de vectores fijos de f es un subespacio de dimensión 2, entonces f es la simetría respecto a ese subespacio.*

(3) *Si el único vector fijo de f es el cero, entonces f es la composición de un giro y una simetría donde el eje de giro y el subespacio de simetría son ortogonales.*

4. Movimientos. Clasificación

4.1. Movimientos

Los movimientos son aplicaciones de un espacio afín euclídeo en sí mismo que conservan las distancias. Cuando el espacio afín euclídeo tiene dimensión finita se pueden caracterizar algebraicamente como aplicaciones afines cuya aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal; en este caso el conjunto de movimientos es un grupo con la operación composición.

Definición 4.1. Se dice que un espacio afín $\mathbb{A}$ sobre V es un *espacio afín euclídeo* si V es un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un espacio afín euclídeo sobre V es *orientado* si el espacio vectorial V está orientado.

Definición 4.2. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo sobre V y sean P y Q dos puntos $\mathbb{A}$. Se llama *distancia* entre P y Q a la longitud del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$d\,(\,P\,,\,Q) = \parallel\,\overrightarrow{PQ}\,\parallel\,.$$

Definición 4.3. Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo sobre V. Se dice que una aplicación $M \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es *un movimiento de* $\mathbb{A}$ si conserva las distancias entre los puntos, es decir

$$d\,(\,P\,,\,Q) = d\,(\,M(P)\,,\,M(Q)),\ \forall\, P, Q \in \mathbb{A}$$

Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ el conjunto de movimientos de $\mathbb{A}$.

Teorema 4.4. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo sobre V de dimensión finita y sea $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación. Son equivalentes:*

(1) *M es un movimiento.*

(2) *M es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal.*

Demostración. Veamos (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $A \in \mathbb{A}$ y $f\colon V \to V$ la aplicación dada por

$$f(v) = \overrightarrow{M(A)\,, M(A+v)}, \quad \forall\, v \in V.$$

La aplicación f verifica que $f(0) = 0$ y además

$$\begin{aligned}\parallel f(v) - f(v') \parallel &= \parallel \overrightarrow{M(A), M(A+v)} - \overrightarrow{M(A), M(A+v')} \parallel = \parallel \overrightarrow{M(A+v'), M(A+v)} \parallel \\ &= d\,(\, M(A+v')\ , M(A+v)\,) = d\,(\, A+v'\ ,\ A+v\,) = \parallel \overrightarrow{A+v', A+v} \parallel \\ &= \parallel v - v' \parallel .\end{aligned}$$

Veamos que f es una isometría:

- f conserva productos escalares:

  $$\parallel v \parallel^2 + \parallel w \parallel^2 -2\, v{\cdot}w = \parallel v{-}w \parallel^2 = \parallel f(v){-}f(w) \parallel^2 = \parallel f(v) \parallel^2 + \parallel f(w) \parallel^2 -2\, f(v){\cdot}f(w),$$

  y entonces
  $$v \cdot w = f(v) \cdot f(w).$$

- Veamos que $f(v+w) = f(v) + f(w)$. Pongamos $u = v + w$. Se tiene

  $$\begin{aligned}0 &= \parallel u - v - w \parallel^2 = \parallel u \parallel^2 + \parallel v \parallel^2 + \parallel w \parallel^2 -2\, u \cdot v - 2\, u \cdot w + 2\, v \cdot w \\ &= \parallel f(u) \parallel^2 + \parallel f(v) \parallel^2 + \parallel f(w) \parallel^2 -2\, f(u) \cdot f(v) - 2\, f(u) \cdot f(w) + 2f(v) \cdot f(w) \\ &= \parallel f(u) - f(v) - f(w) \parallel^2 .\end{aligned}$$

  Así, $f(v+w) = f(v) + f(w)$.

- Veamos que $f(\lambda\, v) = \lambda\, f(v)$. Pongamos $u = \lambda\, v$. Se tiene

  $$\begin{aligned}0 &= \parallel u - \lambda\, v \parallel^2 = \parallel u \parallel^2 + \lambda^2 \parallel v \parallel^2 -2\, \lambda\, u \cdot v = \parallel f(u) \parallel^2 + \lambda^2 \parallel f(v) \parallel^2 -2\, \lambda\, f(u) \cdot f(v) \\ &= \parallel f(u) - \lambda f(v) \parallel^2 .\end{aligned}$$

  Así, $f(\lambda\, v) = \lambda\, f(v)$.

  Por tanto, f es una transformación ortogonal y dado que $f(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{M(A), M(P)}$, se tiene que $M(P) = M(A) + f(\overrightarrow{AP})$, para cada $P \in \mathbb{A}$. Por el ejemplo (3) de 2.13, M es una aplicación afín con aplicación lineal asociada f.

$(2) \Rightarrow (1)$ Por ser f una transformación ortogonal, se tiene

$$\begin{aligned} d(\,M(P)\,,\,M(P')\,) &= \|\,\overrightarrow{M(P), M(P')}\,\| = \|\,\overrightarrow{M(A) + f(\overrightarrow{AP}), M(A) + f(\overrightarrow{AP'})}\,\| \\ &= \|\,-f(\overrightarrow{AP}) + f(\overrightarrow{AP'})\,\| = \|\,f(\overrightarrow{PP'})\,\| = \|\,\overrightarrow{PP'}\,\| = d(\,P\,,\,P'). \end{aligned}$$

Obsérvese que para la implicación $(2) \Rightarrow (1)$ no hace falta que el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ tenga dimensión finita. □

Ejemplos 4.5. (1) La aplicación identidad $1_{\mathbb{A}} \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es un movimiento.

(2) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo de dimensión finita y M_1 y M_2 son movimientos de $\mathbb{A}$ con transformaciones ortogonales asociadas f_1 y f_2, respectivamente, entonces $M_2 \circ M_1$ es un movimiento con transformación ortogonal asociada $f_2 \circ f_1$.

(3) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo sobre V y f es una transformación ortogonal de V, entonces por el ejemplo (3) de 2.13 y el teorema 4.4, la aplicación $M \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por

$$M(P) = A' + f(\overrightarrow{AP}), \quad \forall\, P \in \mathbb{A},$$

donde $A, A' \in \mathbb{A}$, es un movimiento.

(4) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo de dimensión finita y M es un movimiento de A, la aplicación inversa de M es un movimiento. En efecto, si f es la transformación ortogonal asociada a M y $A \in \mathbb{A}$, por el ejemplo (3), la aplicación $M' \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por

$$M'(P) = A + f^{-1}(\overrightarrow{M(A), P}), \quad \forall\, P \in \mathbb{A}$$

es un movimiento; además M' es la aplicación inversa de M.

(5) Sea $(\mathbb{A}, V, -)$ un espacio afín euclídeo. Por el ejemplo (2) de 2.13, la aplicación traslación por un vector $v \in V$, $t_v \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $t_v(P) = P + v$, es un movimiento.

(6) Si V es un espacio vectorial euclídeo, $v \in V$ y f es una transformación ortogonal de V, entonces $t_v \circ f$ es un movimiento, por ser composición movimientos. Recíprocamente, si V tiene dimensión finita y M es un movimiento de V, por el ejemplo (6) de 2.13, existe una transformación ortogonal f de V tal que $M = t_{M(0)} \circ f$.

Teorema 4.6. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo de dimensión finita sobre V. El conjunto $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ de movimientos de $\mathbb{A}$ es un grupo con la operación composición; además, los grupos $\mathcal{M}(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})$ y $\mathcal{O}(V)$ son isomorfos.*

Demostración. Por los ejemplos (1), (2) y (4) de 4.5, $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ es un grupo.

La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi\,:\mathcal{M}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V) \\ M & \rightsquigarrow & f \end{array}$$

donde f es la transformación ortogonal asociada a M, es un homomorfismo de grupos suprayectivo cuyo núcleo es $T(\mathbb{A})$. En efecto, si $\phi(M) = 1_V$, por el lema anterior $M \in T(\mathbb{A})$.

La aplicación ϕ es suprayectiva, puesto que dado $f \in \mathcal{O}(V)$ el movimiento $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dado por $M(P) = A + f(\overrightarrow{AP})$, donde $A \in \mathbb{A}$, verifica que $\phi(M) = f$.

Por tanto, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \bar{\phi}: & M(\mathbb{A})/T(\mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V) \\ & M + T(\mathbb{A}) & \rightsquigarrow & \phi(M) \end{array}$$

es un isomorfismo de grupos.

4.2. Movimientos en el plano. Clasificación

Vamos a describir los movimientos del plano afín euclídeo y probar que existen exactamente cuatro tipos de movimientos distintos: las traslaciones, los giros de centro un punto, las simetrías respecto a una recta y las simetrías deslizantes. Este resultado fue probado en 1831 por Michel Chasles.

Vamos a suponer que $\mathbb{A}$ es un plano afín euclídeo orientado sobre V.

Definición 4.7. Se llama *giro de centro el punto* C y *ángulo* φ, al movimiento

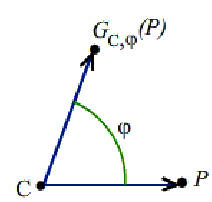
$$\begin{array}{rccc} G_{\mathrm{C},\varphi}: & \mathbb{A} & \rightarrow & \mathbb{A} \\ & P & \rightsquigarrow & \mathrm{C} + G_{\varphi}(\overrightarrow{\mathrm{C}P}), \end{array}$$

donde G_{φ} es el giro de ángulo φ en V. Si $\varphi = \pi$, entonces se dice que $G_{\mathrm{C},\pi}$ es una simetría central de centro C.

Proposición 4.8. *El único punto fijo del giro de centro* C *y ángulo* φ*, si* $\varphi \neq 0$*, es* C.

Demostración. Se tiene

$$G_{\mathrm{C},\varphi}(P) = P \iff \mathrm{C} + G_{\varphi}(\overrightarrow{\mathrm{C}P}) = P \iff G_{\varphi}(\overrightarrow{\mathrm{C}P}) = \overrightarrow{\mathrm{C}P} \iff \overrightarrow{\mathrm{C}P} = 0 \iff P = \mathrm{C}.$$



Ejemplo 4.9. El giro de $\mathbb{R}^2$ de centro $\mathrm{C} = (1, -1)$ y ángulo $\pi/3$ es el movimiento $G_{\mathrm{C},\pi/3}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$G_{\mathrm{C},\pi/3}(x, y) = (1, -1) + G_{\pi/3}(x - 1, y + 1).$$

Dado que la matriz asociada a $G_{\pi/3}$ respecto a la base canónica C es

$$(G_{\pi/3})_C = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

se tiene

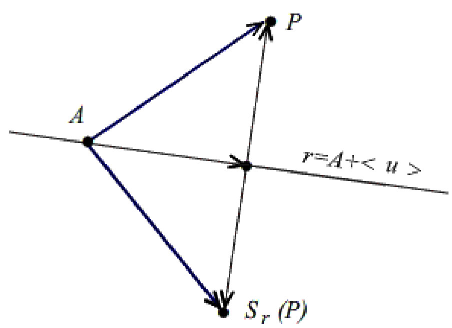
$$G_{\mathrm{C},\pi/3}(x,y) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}+x-\sqrt{3}\,y, -1-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,x+y).$$

Definición 4.10. Se llama *simetría respecto a la recta* $r = A + \langle u \rangle$ al movimiento

$$\begin{aligned} S_r : \ \mathbb{A} \quad &\rightarrow \quad \mathbb{A} \\ P &\rightsquigarrow A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}), \end{aligned}$$

donde $S_{\langle u \rangle}$ es la simetría respecto a $\langle u \rangle$.

Observación 4.11. Si $A' \in r$, entonces $A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = A' + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{A'P})$. En efecto, dado que $\overrightarrow{AA'} \in \langle u \rangle$, se tiene $S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AA'}$ y por tanto $S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AA' + A'P}) = \overrightarrow{AA'} + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{A'P})$.



Proposición 4.12. *Los únicos puntos fijos de la simetría S_r son los puntos de r.*

Demostración. Se tiene

$$S_r(P) = P \Longleftrightarrow A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = P \Longleftrightarrow S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AP} \in \langle u \rangle \Longleftrightarrow P \in r. \quad \square$$

Ejemplo 4.13. La simetría de $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $r = (1,1) + \langle (1,2) \rangle$, es el movimiento $S_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$S_r(x,y) = (1,1) + S_{\langle (1,2) \langle}(x-1, y-1),$$

donde $S_{\langle (1,2) \rangle}$ es la simetría respecto a $\langle (1,2) \rangle$, es decir la aplicación $\mathbb{R}$-lineal dada por $S_{\langle (1,2) \rangle}(1,2) = (1,2)$ y $S_{\langle (1,2) \rangle}(2,-1) = (-2,1)$, Se tiene que

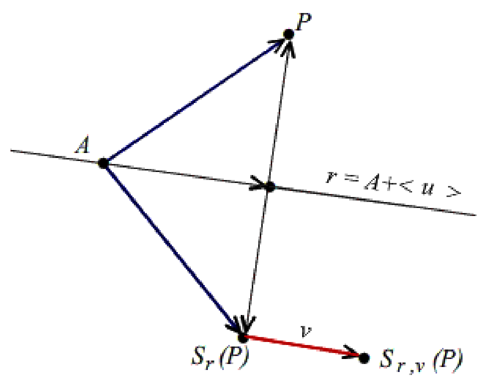
$$S_{\langle (1,2) \rangle}(x,y) = \frac{1}{5}\,(-3\,x + 4\,y, 4\,x + 3\,y),$$

y entonces

$$S_r(x,y) = \frac{1}{5}\,(4 - 3\,x + 4\,y, -2 + 4\,x + 3\,y).$$

Definición 4.14. Se llama *simetría deslizante respecto a la recta* $r = A + \langle u \rangle$ y *vector de traslación* $v \in \langle u \rangle$, $v \neq 0$ al movimiento $S_{r,v} = t_v \circ S_r$, donde S_r es la simetría respecto a la recta r.

Proposición 4.15. *La simetría deslizante* $S_{r,v}$ *no tiene puntos fijos.*



Demostración. Si P es un punto fijo de $S_{r,v}$, entonces se tiene

$$S_{r,v}(P) = P \Longleftrightarrow A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) + v = P \Longleftrightarrow S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) + v = \overrightarrow{AP}$$

Dado que además, $S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} + v$, se tiene que $v = 0$, lo cual contradice la definición de simetría deslizante. $\square$

Proposición 4.16. *La descomposición de una simetría deslizante como composición de la simetría respecto a una recta y una traslación por un vector de la dirección de la recta es única.*

Demostración. Si $t_v \circ S_r = t_{v'} \circ S_{r'}$, con $r = A + \langle u \rangle$, $r' = A' + \langle u' \rangle$, $v \in \langle u \rangle$ y $v' \in \langle u' \rangle$, entonces las transformaciones ortogonales asociadas son iguales, es decir $S_{\langle u \rangle} = S_{\langle u' \rangle}$, de donde se sigue que $\langle u \rangle = \langle u' \rangle$. Se tiene

$$A + v = A' + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{A'A}) + v',$$

equivalentemente,

$$v = \overrightarrow{AA'} + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{A'A}) + v',$$

y por el lema 3.12

$$v - v' = (S_{\langle u \rangle} - 1_V)(\overrightarrow{A'A}) \in \langle u \rangle \cap \langle u \rangle^{\perp} = 0.$$

Así, $S_r = S_{r'}$ y entonces $r = r'$. $\square$

Ejemplo 4.17. La simetría deslizante de $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $r = (1,1) + \langle(1,2)\rangle$ y vector de traslación $v = (-1,-2)$ es el movimiento $S_{r,v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $S_{r,v} = t_{(-1,-2)} \circ S_r$, es decir

$$S_{r,v}(x,y) = \frac{1}{5}\,(-1 - 3\,x + 4\,y, -12 + 4\,x + 3\,y).$$

Teorema 4.18. (Teorema de clasificación de los movimientos del plano) *Sea M un movimiento de $\mathbb{A}$ y f su transformación ortogonal asociada. Pongamos $V_1 = \mathrm{Nuc}\,(f - 1_V)$ y sea A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$. Se tiene*

(1) *Si $f \in \mathbb{O}^+(V)$ y $f = 1_V$, entonces $M = t_v$ es una traslación con $v = \overrightarrow{A, M(A)}$.*

(2) *Si $f \in \mathbb{O}^+(V)$ y $f \neq 1_V$ entonces f es un giro de ángulo $\varphi \neq 0$ y M es el giro de centro $\mathrm{C} = A - v$ y ángulo φ, siendo v el vector que verifica $f(v) - v = \overrightarrow{A, M(A)}$.*

(3) *Si $f \in \mathbb{O}^-(V)$ y el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces M es la simetría respecto a la recta $r = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} + V_1$.*

(4) *Si $f \in \mathbb{O}^-(V)$ y el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$, entonces M es la simetría deslizante respecto a la recta $r = A + \frac{1}{2} v_2 + V_1$, donde $\overrightarrow{AM(A)} = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in (V_1)^\perp$, y el vector de traslación de M es v_1.*

Demostración. (1) Se sigue del lema 2.14.

(2) Por la proposición 3.27, $f = G_\varphi$. Dado que $\mathrm{Nuc}(f - 1_V) = \{0\}$, se tiene que $f - 1_V$ es un isomorfismo y por tanto existe un único $v \in V$ tal que $(f - 1_V)(v) = \overrightarrow{AM(A)}$. Pongamos $\mathrm{C} = A - v$. Se tiene,

$$M(P) = M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{AM(A)} + f(\overrightarrow{AP}) = A - v + f(v) + f(\overrightarrow{AP}) = \mathrm{C} + f(\overrightarrow{\mathrm{C}P}) = G_{\mathrm{C},\varphi}(P).$$

(3) Del teorema 3.32 se sigue que $f = S_{V_1}$ (simetría respecto a V_1). Poniendo $r = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM(A)} + V_1$, para todo $P \in \mathbb{A}$ se tiene

$$\begin{aligned} M(P) =& M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{AM(A)} + f(\overrightarrow{AP}) \\ =& A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM(A)} + f(\overrightarrow{A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM(A)}, A}) + f(\overrightarrow{AP}) = S_r(P) \end{aligned}$$

(4) Dado que $f = S_{V_1} = 1_{V_1}\perp - 1_{(V_1)^\perp}$, poniendo $\overrightarrow{AM(A)} = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$, y $r = A + \frac{1}{2} v_2 + V_1$ se tiene

$$\begin{aligned} M(P) =& M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{AM(A)} + f(\overrightarrow{AP}) \\ =& A + \frac{1}{2} v_2 + f(\overrightarrow{A + \frac{1}{2} v_2\ \ A}) + f(\overrightarrow{AP}) + v_1 = S_r(P) + v_1 = S_{r,v_1}(P) \end{aligned}$$

El vector v_1 es la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{A, M(A)}$ sobre V_1, por la definición 3.9 .

Obsérvese que $\overrightarrow{A,M(A)} \in (V_1)^\perp$ si, y solo si, $\overrightarrow{P,M(P)} \in (V_1)^\perp$, para todo punto P de $\mathbb{A}$. En efecto,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P,M(P)} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{A,M(A)} + \overrightarrow{M(A),M(P)} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{A,M(A)} + f(\overrightarrow{AP})\\ &= (f - 1_V)(\overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{AM(A)}\end{aligned}$$

y $(f - 1_V)(\overrightarrow{AP}) \in (V_1)^\perp$ por el lema 3.12. □

Corolario 4.19. *Sea $M\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un movimiento y $f\colon V \to V$ la transformación ortogonal asociada a M. Se tiene*

(1) *Si M tiene un único punto fijo entonces M es un giro de centro ese punto y el ángulo del giro M es el ángulo del giro f.*

(2) *Si M tiene solamente una recta de puntos fijos, entonces M es la simetría respecto a esa recta.*

(3) *Si M no es una traslación y no tiene puntos fijos, entonces M es la simetría deslizante respecto a una recta r; el vector de traslación v de M es la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{AM(A)}$ (siendo A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$) sobre el subespacio V_1 de vectores fijos de f y la recta r es la recta de simetría de la simetría $t_{-v} \circ M$.*

Ejemplo 4.20. La aplicación $M_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$M_1(x,y) = \frac{1}{2}\,(2 - \sqrt{3}\,x - y\,,\, -4 - 2\sqrt{3} + x - \sqrt{3}y),$$

es un movimiento, puesto que $M_1 = t_{(1,-2-\sqrt{3})} \circ f_1$, siendo $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación ortogonal

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2}\,(-\sqrt{3}\,x - y\,,\, x - \sqrt{3}\,y).$$

Dado que $\det f = 1$, entonces $f_1 \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$. Los puntos fijos $P = (x,y)$ de M_1 son

$$\begin{aligned}M_1(x,y) = (x,y) &\iff \frac{1}{2}\,(2 - \sqrt{3}\,x - y) = x, \quad \frac{1}{2}\,(-4 - 2\sqrt{3} + x - \sqrt{3}\,y) = y\\ &\iff (x,y) = (1, -\sqrt{3})\end{aligned}$$

Por el corolario 4.19, M_1 es un giro de centro $(1,-\sqrt{3})$. La matriz asociada a f_1 respecto a la base canónica C es

$$(f_1)_C = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

y por la definición 3.28, el ángulo φ del giro f_1 es $5\pi/6$, puesto que $\cos\varphi = -\sqrt{3}/2$ y $\operatorname{sen}\varphi = 1/2$. Así, M_1 es el giro de centro $(1,-\sqrt{3})$ y ángulo $5\pi/6$.

Ejemplo 4.21. La aplicación $M_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$M_2(x,y) = \frac{1}{2}\,(2 + x + \sqrt{3}\,y\,,\, -2\sqrt{3} + \sqrt{3}\,x - y),$$

es un movimiento, puesto que $M_2 = t_{(1,-\sqrt{3})} \circ f_2$ donde f_2 es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$f_2(x,y) = \frac{1}{2}\,(x + \sqrt{3}\,,\, \sqrt{3}\,x - y).$$

Calculamos los puntos fijos de M_2:

$$\begin{aligned} M_2(x,y) = (x,y) &\iff x = \frac{1}{2}\,(2 + x + \sqrt{3}\,y), \;\; y = \frac{1}{2}(-2\sqrt{3} + \sqrt{3}\,x - \, y) \\ &\iff x - \sqrt{3}\,y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, M_2 es la simetría respecto a la recta de ecuación $X - \sqrt{3}\,Y - 2 = 0$ en la referencia canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.22. La aplicación $M_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$M_3(x,y) = (6 + y, x),$$

es un movimiento, puesto que $M_3 = t_{(6,0)} \circ f_2$ donde f_2 es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$f_2(x,y) = (y,x).$$

Dado que M_3 no tiene puntos fijos, por el corolario 4.19, M_3 es una simetría deslizante, es decir $M_3 = t_v \circ S_r$ siendo v el vector de traslación y S_r la simetría respecto a la recta r.

El vector de traslación es la proyección ortogonal de $M_3(0,0) = (6,0)$ sobre el subespacio $\mathrm{Nuc}(f_2 - 1_{R^2}) = \{(x,y) \mid f_2(x,y) = (x,y)\} = \langle (1,1) \rangle$. Por la definición 3.9, dado que $\langle (1,1) \rangle^{\perp} = \langle (1,-1) \rangle$ y que

$$(6,0) = 3(1,1) + 3(1,-1),$$

se tiene que $v = (3,3)$. Por tanto, $t_{(-3,-3)} \circ M_3 = S_r$ y entonces $S_r(x,y) = (3+y, 3+x)$. Así, M_3 es la simetría deslizante respecto a la recta r de ecuación $X - Y - 3 = 0$ en la referencia canónica y vector de traslación $(3,3)$.

4.3. Movimientos en el espacio afín euclídeo tridimensional

Vamos a describir y clasificar los movimientos del espacio afín euclídeo tridimensional; para esto utilizaremos el teorema 3.37 de clasificación de las transformaciones ortogonales.

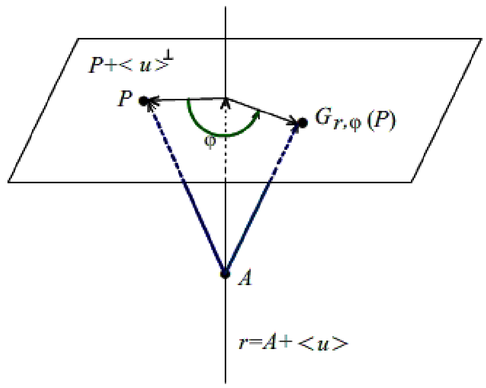
En 1976 Euler probó que todo movimiento del espacio es de uno de los seis tipos descritos en esta sección, es decir una traslación, una rotación alrededor de una recta, un movimiento helicoidal, una simetría respecto a un plano, una simetría deslizante o la composición de un giro y una simetría respecto a un plano perpendicular al eje de giro.

Vamos a suponer que $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo orientado de dimensión 3 sobre V.

Definición 4.23. Se llama *giro de eje orientado la recta* $r = A + \langle u \rangle$ y *ángulo* φ, al movimiento

$$\begin{aligned} G_{r,\varphi} : \mathbb{A} &\to \mathbb{A} \\ P &\rightsquigarrow A + G_{\langle u \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}), \end{aligned}$$

donde $G_{\langle u \rangle,\varphi}$ es un giro de V de eje orientado $\langle u \rangle$ y ángulo φ.



Observación 4.24. Si $A' \in r$, entonces $A + G_{\langle u \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) = A' + G_{\langle u \rangle,\varphi}(\overrightarrow{A'P})$. En efecto, dado que $\overrightarrow{AA'} \in \langle u \rangle$, se tiene que $G_{\langle u \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AA'}$.

Proposición 4.25. *Los únicos puntos fijos del giro $G_{r,\varphi}$, si $\varphi \neq 0$, son los puntos del eje $r = A + \langle u \rangle$.*

Demostración. Se tiene

$$G_{r,\alpha}(P) = P \Longleftrightarrow A + G_{\langle u \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) = P \Longleftrightarrow G_{\langle u \rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AP} \in \langle u \rangle \Longleftrightarrow P \in r.$$

□

Ejemplo 4.26. El giro de $\mathbb{R}^3$ de eje orientado la recta $r = (1, 2, -1) + \langle (1, 1, -1) \rangle$ y ángulo $4\pi/3$, es el movimiento $G_{r,4\pi/3} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$G_{r,4\pi/3}(x, y, z) = (1, 2, -1) + G_{\langle (1,1,-1) \rangle,4\pi/3}(x - 1, y - 2, z + 1)$$

y donde $G_{\langle (1,1,-1) \rangle,4\pi/3}$ es el giro de eje orientado $\langle (1, 1, -1)$ y ángulo $4\pi/3$.

$$G_{\langle (1,1,-1) \rangle,4\pi/3} = G_{4\pi/3} \perp 1_{\langle (1,1,-1) \rangle}, \quad G_{4\pi/3} \in \mathcal{O}^+(\langle (1, 1, -1) \rangle^\perp).$$

Se tiene que

$$\langle (1, 1, -1) \rangle^\perp = \langle (0, 1, 1), (1, -1, 0) \rangle.$$

Una base ortogonal de $\langle (1, 1, -1) \rangle^\perp$ es, por ejemplo, el conjunto

$$B_2 = ((0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)).$$

Sea $B = ((0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6), (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3))$. La base B es una base de orientación positiva, puesto que $\det 1_{BC} > 0$. Por tanto B_2 es una base ortonormal de $\langle(1, 1, -1)\rangle^{\perp}$ de orientación positiva y se tiene

$$(G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3})_B = \begin{pmatrix} (G_{4\pi/3})_{B_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$(G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3})_C = 1_{BC}\,(G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3})_B\,1_{CB}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

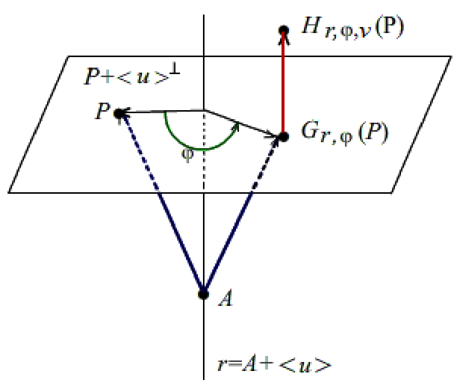
donde $1_{CB} = (1_{BC})^t$ por ser la base B ortonornal. Por tanto,

$$G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3}(x, y, z) = (-z, x, -y),$$

y entonces

$$\begin{aligned} G_{r,4\pi/3}(x, y, z) =& (1, 2, -1) + G_{\langle(1,1,-1)\rangle,4\pi/3}(x - 1, y - 2, z + 1) \\ =& (-z, 1 + x, 1 - y). \end{aligned}$$

Definición 4.27. Se llama *movimiento helicoidal de eje la recta* $r = A + \langle u\rangle$, *ángulo* φ, $\varphi \neq 0$ y *vector de traslación* v, al movimiento $H_{r,\varphi,v} = t_v \circ G_{r,\varphi}$ donde $G_{r,\varphi}$ es el giro de eje orientado r y ángulo φ.



Proposición 4.28. *Un movimiento helicoidal $H_{r,\varphi,v}$ no tiene puntos fijos.*

Demostración. Sea $H_{r,\varphi,v} = t_v \circ G_{r,\varphi}$. Se tiene $\mathrm{Im}(G_{\langle u\rangle,\varphi} - 1_V) = (\mathrm{Nuc}(G_{\langle u\rangle,\varphi} - 1_V))^{\perp}$, por el lema 3.12 y así, $\mathrm{Im}(G_{\langle u\rangle,\varphi} - 1_V) = \langle u\rangle^{\perp}$. Razonemos por reducción al absurdo: Si P es un punto fijo de $H_{r,v,\alpha}$ entonces,

$$\begin{aligned} H_{r,\varphi,v}(P) = P &\Longleftrightarrow A + G_{\langle u\rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) + v = P \Longleftrightarrow G_{\langle u\rangle,\varphi}(\overrightarrow{AP}) + v = \overrightarrow{AP} \\ &\Longleftrightarrow (G_{\langle u\rangle,\varphi} - 1_V)(\overrightarrow{AP}) = -v. \end{aligned}$$

Así, $v \in \langle u\rangle \cap \mathrm{Im}(G_{\langle u\rangle,\varphi} - 1_V) = \langle u\rangle \cap \langle u\rangle^{\perp} = 0$. □

Proposición 4.29. *La descomposición de un movimiento helicoidal como composición de un giro y una traslación por un vector en la dirección del eje de giro es única.*

Demostración. Si $t_v \circ G_{r,\varphi} = t_{v'} \circ G_{r',\varphi'}$, siendo $r = A + \langle u\rangle$ y $r' = A' + \langle u'\rangle$ con $v \in \langle u\rangle$ y $v' \in \langle u'\rangle$, entonces se tiene

$$G_{\langle u\rangle,\varphi} = G_{\langle u'\rangle,\varphi'}$$

y entonces sus subespacios $\langle u\rangle$ y $\langle u'\rangle$ de vectores fijos coinciden y $\varphi = \varphi'$. Se tiene

$$A + G_{\langle u\rangle,\varphi}(\overrightarrow{AA'}) + v = A' + v',$$

equivalentemente,

$$G_{\langle u\rangle,\varphi}(\overrightarrow{AA'}) + v = \overrightarrow{A'A} + v'$$

Así,

$$(G_{\langle u\rangle,\varphi} - 1_V)(\overrightarrow{A'A}) = v' - v \in \langle u\rangle \cap \langle u\rangle^{\perp} = \{0\}$$

entonces,

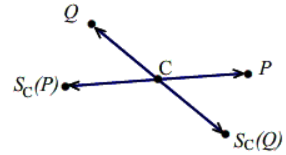
$$v = v, \quad \overrightarrow{AA'} \in \langle u\rangle$$

y $r = r'$. □

Ejemplo 4.30. El movimiento helicoidal de $\mathbb{R}^3$ de eje $r = (1,2,-1) + \langle(1,1,-1)\rangle$, ángulo $4\pi/3$ y vector de traslación $v = (-2,-2,2)$ es el movimiento $H_{r,4\pi/3,v} = t_v \circ G_{r,4\pi/3}$. Por tanto

$$H_{r,4\pi/3,v}(x,y,z) = (-2,-2,2) + G_{r,4\pi/3}(x,y,z) = (-2-z, 1+x, 3-y).$$

Definición 4.31. Se llama *simetría central de centro* C al movimiento $S_{\mathrm{C}}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, dado por $S_{\mathrm{C}}(P) = \mathrm{C} - \overrightarrow{\mathrm{C}P}$, para todo $P \in \mathbb{A}$.



Proposición 4.32. *El único punto fijo de una simetría central de centro* C *es el punto* C.

Demostración. Sea P un punto fijo de S_{C}, se tiene

$$\mathrm{C} - \overrightarrow{\mathrm{C}P} = P \iff -\overrightarrow{\mathrm{C}P} = \overrightarrow{\mathrm{C}P} \iff \mathrm{C} = P$$

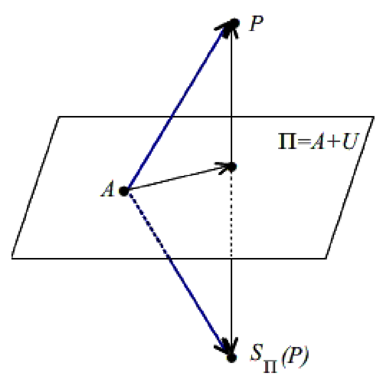
Ejemplo 4.33. La simetría central de $\mathbb{R}^3$ de centro el punto $(2,1,-3)$ es el movimiento $S_{(2,1,-3)} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dado por

$$S_{(2,1,-3)}(x,y,z) = (2,1,-3) - (x-2, y-1, z+3) = (4-x, 2-y, -6-z).$$

Definición 4.34. Se llama *simetría respecto al plano* $\Pi = A+U$, al movimiento

$$\begin{array}{rccc} S_\Pi : & \mathbb{A} & \to & \mathbb{A} \\ & P & \rightsquigarrow & A + S_U(\overrightarrow{AP}), \end{array}$$

donde $S_U \in \mathbb{O}^-(V)$ es la simetría respecto al subespacio U.



Observación 4.35. Si $A' \in \Pi$, entonces $A + S_U(\overrightarrow{AP}) = A' + S_U(\overrightarrow{A'P})$. En efecto, dado que $\overrightarrow{AA'} \in U$, se tiene que $S_U(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AA'}$.

Proposición 4.36. *Los únicos puntos fijos de la simetría* S_Π *son los puntos del plano* $\Pi = A+U$.

Demostración. Se tiene

$$S_\Pi(P) = P \iff A + S_U(\overrightarrow{AP}) = P \iff S_U(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} \iff \overrightarrow{AP} \in U \iff P \in \Pi.$$

Ejemplo 4.37. La simetría de $\mathbb{R}^3$ respecto al plano Π, de ecuación en la referencia canónica $X - Y = 1$, es el movimiento $S_\Pi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

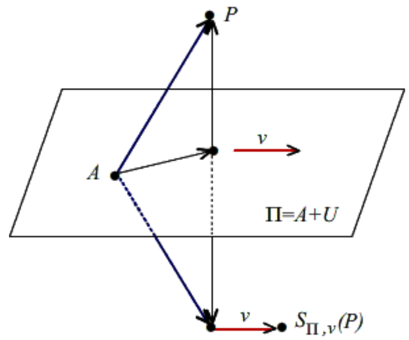
$$S_\Pi(P) = (1,0,0) + S_U(x-1, y, z),$$

donde U es el subespacio dirección de Π.

Dado que $U = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$ y $U^\perp = \langle (1,-1,0) \rangle$, se tiene que $S_U(1,1,0) = (1,1,0)$, $S_U(0,0,1) = (0,0,1)$ y $S_U(1,-1,0) = (-1,1,0)$. Por tanto, $S_U(x,y,z) = (y,x,z)$. Así,

$$S_\Pi(x,y,z) = (1,0,0) + (y, x-1, z) = (1+y, -1+x, z).$$

Definición 4.38. Se llama *simetría deslizante respecto al plano* $\Pi = A + U$ y *vector de traslación* $v \in U$, $v \neq 0$, a la composición $S_{\Pi,v} = t_v \circ S_\Pi$, donde S_Π es la simetría respecto al plano Π.



Proposición 4.39. *La simetría deslizante $S_{\Pi,v}$ no tiene puntos fijos.*

Demostración. Sea $\Pi = A + U$. Razonemos por reducción al absurdo: Si P es un punto fijo de $S_{\Pi,v}$, entonces se tiene

$$S_{\Pi,v}(P) = P \iff A + S_U(\overrightarrow{AP}) + v = P \iff \overrightarrow{AP} = S_U(\overrightarrow{AP}) + v.$$

Dado que además $S_U(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} + v$, se tiene que $v = 0$.

Proposición 4.40. *La descomposición de una simetría deslizante como composición de la simetría respecto a un plano y una traslación por un vector de la dirección del plano es única.*

Demostración. Si $t_v \circ S_\Pi = t_{v'} \circ S_{\Pi'}$, siendo $\Pi = a + U$ y $\Pi' = a' + U'$ donde $v \in U$ y $v' \in U'$, entonces $S_U = S_{U'}$, y por tanto $U = U'$; además,

$$A + S_U(\overrightarrow{AA'}) + v = A' + v'$$

equivalentemente,

$$S_U(\overrightarrow{AA'}) + v = \overrightarrow{AA'} + v'.$$

Se tiene

$$(S_U - 1_V)(\overrightarrow{AA'}) = v' - v \in U \cap U^\perp = \{0\},$$

de donde se sigue que $v = v'$ y que $\overrightarrow{AA'} \in U$. Por tanto, $\Pi = \Pi'$. □

Ejemplo 4.41. La simetría deslizante de $\mathbb{R}^3$ respecto al plano Π de ecuación $X - Y = 1$ en la referencia canónica y vector de traslación $v = (1, 1, -2)$ es el movimiento $S_{\Pi,v} = t_{(1,1,-2)} \circ S_\Pi$. Por tanto,

$$S_{\Pi,v}(x, y, z)) = (1, 1, -2) + S_\Pi(x, y, z) = (1, 1, -2) + (1 + y, -1 + x, z) = (2 + y, x, -2 + z).$$

Teorema 4.42. (Teorema de clasificación de los movimientos del espacio afín euclídeo tridimensional) *Sea M un movimiento de $\mathbb{A}$, f su transformación ortogonal asociada y A un punto de $\mathbb{A}$. Sean $V_1 = \mathrm{Nuc}\,(f - 1_V)$ y $V_{-1} = \mathrm{Nuc}\,(f + 1_V)$. Se tiene*

(1) *Si $f \in \mathbb{O}^+(V)$ y $f = 1_V$, entonces $M = t_v$ es una traslación con $v = \overrightarrow{A, M(A)}$.*

(2) *Si $f \in \mathbb{O}^+(V)$ y $f \neq 1_V$ entonces f es un giro de eje V_1 y ángulo φ, $\varphi \neq 0$, que depende de la orientación de V_1.*

   (a) *Si el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces M es un giro de eje orientado $r = A - v + V_1$ y ángulo φ, siendo v es un vector que verifica $f(v) - v = \overrightarrow{A, M(A)}$.*

   (b) *Si el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$, poniendo $\overrightarrow{AM(A)} = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$, se tiene que M es un movimiento helicoidal de eje $r = A - v + V_1$, ángulo φ y vector de traslación v_1, siendo v un vector que verifica $f(v) - v = v_2$.*

(3) *Si $f \in \mathbb{O}^-(V)$ es la simetría respecto al subespacio V_1 de dimensión 2 (i.e. 1 es un autovalor de f de multiplicidad 2 y -1 es un autovalor de f de multiplicidad 1), entonces se tienen dos casos:*

   (a) *Si el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces M es la simetría respecto al plano $\Pi = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} + V_1$.*

   (b) *Si el vector $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$, poniendo $\overrightarrow{A, M(A)} = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$, se tiene que M es la simetría deslizante respecto al plano $\Pi = A + \frac{1}{2}\, v_2 + V_1$ y vector de traslación v_1.*

(4) *Si $f \in \mathbb{O}^-(V)$ es la composición de un giro de eje V_{-1} y la simetría respecto al plano $(V_{-1})^\perp$ (i.e. los autovalores de f son -1 y $a \pm ci \neq \pm 1$), entonces M tiene un único punto fijo C y M es la composición del giro de eje orientado $\mathrm{C} + V_{-1}$ y ángulo φ que depende de la orientación de V_{-1} y la simetría respecto al plano $\mathrm{C} + (V_{-1})^\perp$.*

(5) *Si $f = -1_V$ entonces M es la simetría central de centro $\mathrm{C} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}$.*

Demostración. (1) Se sigue del lema 2.14.

(2) Sea $f \in \mathbb{O}^+(V)$ el giro de eje orientado V_1 y ángulo φ.

(2) (a) Dado que $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp = \mathrm{Im}(f - 1_V)$, existe $v \in V$ tal que $(f - 1_V)(v) = \overrightarrow{AM(A)}$. Sea $r = A - v + V_1$, se tiene

$$M(P) = M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + f(\overrightarrow{AP}) = A - v + f(\overrightarrow{A - v, P}) = G_{r,\varphi}(P).$$

(2)(b) Pongamos $\overrightarrow{A, M(A)} = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$. Dado que $(V_1)^\perp = \mathrm{Im}\,(f - 1_V)$, existe $v \in V$ tal que $f(v) - v = v_2$. Si $r = A - v + V_1$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + f(\overrightarrow{AP}) = A + v_1 + v_2 + f(\overrightarrow{AP}) \\ &= A - v + f(v) + f(\overrightarrow{AP}) + v_1 = A - v + f(\overrightarrow{A - v\ P}) + v_1 \\ &= G_{r,\varphi}(P) + v_1 = H_{r,\varphi,v_1}(P). \end{aligned}$$

(3) Sea $f \in \mathbb{O}^-(V)$ la simetría respecto al subespacio V_1 de dimensión 2.

(3) (a) Si $\overrightarrow{A, M(A)} \in (V_1)^\perp$, poniendo $\Pi = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} + V_1$, se tiene

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + f(\overrightarrow{AP}) \\ &= A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} - f(\frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}) + f(\overrightarrow{AP}) \\ &= A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)} + f(\overrightarrow{A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}, P}) = S_\Pi(P). \end{aligned}$$

(3) (b) Si $\overrightarrow{A, M(A)} \notin (V_1)^\perp$, poniendo $\overrightarrow{A, M(A)} = v_1 + v_2$, con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in (V_1)^\perp$ y $\Pi = A + \frac{1}{2} v_2 + V_1$, se tiene

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + f(\overrightarrow{AP}) = A + v_1 + v_2 + f(\overrightarrow{AP}) \\ &= A + \frac{1}{2} v_2 - f(\frac{1}{2} v_2) + f(\overrightarrow{AP}) + v_1 = A + \frac{1}{2} v_2 + f(\overrightarrow{A + \frac{1}{2} v_2, P}) + v_1 \\ &= S_{\Pi, v_1}(P). \end{aligned}$$

(4) Sea $f \in \mathbb{O}^-(V)$ tal que $f = h \circ g$ donde g es el giro de eje orientado V_{-1} y ángulo φ y h es la simetría respecto al subespacio $(V_{-1})^\perp$. Dado que $\mathrm{Nuc}(f - 1_V) = 0$, se tiene que la aplicación $f - 1_V$ es un isomorfismo y por tanto existe un único vector v tal que $(f - 1_V)(v) = \overrightarrow{AM(A)}$. Consideremos la recta $r = A - v + V_{-1}$ y el plano $\Pi = A - v + (V_{-1})^\perp$. Para todo $P \in \mathbb{A}$ se tiene

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + f(\overrightarrow{AP}) = A - v + f(v) + f(\overrightarrow{AP}) \\ &= A - v + f(\overrightarrow{A - v, P}) = A - v + h(g(\overrightarrow{A - v, P})) = A - v + h(\overrightarrow{A - v, A - v + g(\overrightarrow{A - v, P})}) \\ &= S_\Pi(A - v + g(\overrightarrow{A - v, P}) = (S_\Pi \circ G_{r,\varphi})(P). \end{aligned}$$

Obsérvese que $A - v$ es el único punto fijo M. En efecto,

$$M(P) = M(A) + f(\overrightarrow{AP}) = A + \overrightarrow{A, M(A)} + f(\overrightarrow{AP}) = A - v + f(v) + f(\overrightarrow{AP}) = P$$

si, y solo si, $(f - 1_V)(v + \overrightarrow{AP}) = 0$. Así, $\overrightarrow{AP} = -v$ y por tanto $P = A - v$.

(5) Si $f = -1_V$ y $\mathrm{C} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}$, entonces para todo $P \in \mathbb{A}$ se tiene

$$\begin{aligned} M(P) &= M(A) - \overrightarrow{AP} = A + \overrightarrow{A, M(A)} - \overrightarrow{AP} \\ &= \mathrm{C} - \overrightarrow{A + \frac{1}{2}\overrightarrow{A, M(A)}, A} - \overrightarrow{AP} = \mathrm{C} - \overrightarrow{\mathrm{C}P} = S_\mathrm{C}(P). \end{aligned}$$

Obsérvese que en este caso, si $B = (v_1, v_2, v_3)$ es una base ortonormal de V, entonces la recta $r = \mathrm{C} + \langle v_1 \rangle$ y el plano $\Pi = \mathrm{C} + \langle v_2, v_3 \rangle$ son perpendiculares y $S_\mathrm{C} = G_{r,\pi} \circ S_\Pi$. $\square$

Corolario 4.43. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión 3 orientado V, M un movimiento de A y f su transformación ortogonal asociada. Se tiene*

(1) *Si M tiene solamente una recta de puntos fijos, entonces M es un giro de eje orientado esa recta y el ángulo de M es el ángulo del giro f.*

(2) *Si M tiene solamente un plano de puntos fijos, entonces M es la simetría respecto a ese plano.*

(3) *Si M tiene un único punto fijo C y $f \neq -1_V$, entonces $f = h \circ g$ donde g es un giro de eje orientado V_{-1} y h la simetría respecto a $(V_{-1})^{\perp}$ y M es la composición del giro de eje orientado $r = \mathrm{C} + V_{-1}$ y ángulo el ángulo del giro g y la simetría respecto al plano $\Pi = \mathrm{C} + (V_{-1})^{\perp}$.*

(4) *Si M no tiene puntos fijos, no es una traslación y $f \in \mathbb{O}^{+}(V)$, entonces M es un movimiento helicoidal. El vector de traslación v es la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{AM(A)}$ (siendo A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$) sobre el subespacio V_1 de vectores fijos de f, el ángulo de M es el del giro f y el eje de M es el del giro $t_{-v} \circ M$.*

(5) *Si M no tiene puntos fijos, no es una traslación y $f \in \mathbb{O}^{-}(V)$, entonces M es una simetría deslizante respecto a un plano Π. El vector de traslación v es la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{AM(A)}$ (siendo A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$) sobre el subespacio V_1 de vectores fijos de f y el plano Π es el plano de simetría de la simetría $t_{-v} \circ M$.*

(6) *Si $f = -1_V$, entonces M es la simetría central de centro el único punto fijo de M.*

Ejemplo 4.44. La aplicación $M_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$M_1(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(-2\sqrt{2} + x + \sqrt{2}\,y - z\,,\, 4 + \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,z\,,\, -2 + x - \sqrt{2}\,y - z)$$

es un movimiento, puesto que $M_1 = t_{(-\sqrt{2}\,,2,-1)} \circ f_1$ donde f_1 es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$f_1(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(x + \sqrt{2}\,y - z\,,\, \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,z\,,\, x - \sqrt{2}\,y - z)$$

El conjunto de puntos fijos de M_1 es el conjunto de puntos de la recta

$$r \equiv \begin{cases} X - \sqrt{2}\,Y + Z = -2\sqrt{2} \\ X - \sqrt{2}\,Y - 3\,Z = 2 \end{cases}$$

por el corolario 4.43, M_1 es un giro de eje la recta r. Vamos a calcular el ángulo del giro f_1. El polinomio característico de f_1 es $-X^3+1$ y sus raíces son: 1, $-1/2+\sqrt{3}/2\,i$, $-1/2-\sqrt{3}/2\,i$, por el teorema de clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$, f_1 es un giro de eje

$$V_1 = \mathrm{Nuc}(\mathrm{f}_1 - 1_{\mathbb{R}^3}) = \langle(\sqrt{2},1,0)\rangle.$$

El ángulo φ depende de la orientación en $\langle(\sqrt{2},1,0)\rangle$. Si orientamos $\langle(\sqrt{2},1,0)\rangle$ con la base $((\sqrt{2},1,0))$ y consideramos en el plano $\langle(\sqrt{2},1,0)\rangle^{\perp}$ la base $((-1,\sqrt{2},0),(0,0,1))$, se tiene que la base $((-1,\sqrt{2},0),(0,0,1),(\sqrt{2},1,0))$ es de orientación positiva. Pongamos $B = ((-\sqrt{3}/3,\sqrt{2/3},0),(0,0,1),(\sqrt{2/3},\sqrt{3}/3,0)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
(f_1)_B &= 1_{CB}\,(f_1)_C\,1_{BC} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2/3} & \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 & -1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde $1_{CB} = (1_{BC})^t$ por ser la base B ortonornal. Así, por la observación 3.38

$$\cos\varphi = -1/2, \quad \operatorname{sen}\varphi = -\sqrt{3}/2$$

y entonces $\varphi = 4\pi/3$ y M_1 es el giro de eje orientado la recta

$$r = (\frac{1-3\sqrt{2}}{2}\,,0\,,\frac{-1-\sqrt{2}}{2}) + \langle(\sqrt{2},1,0)\rangle,$$

y ángulo $4\pi/3$. Si orientamos V_1 con la base $((-\sqrt{2},-1,0))$, entonces M_1 es también el giro de eje orientado

$$r = (\frac{1-3\sqrt{2}}{2}\,,0\,,\frac{-1-\sqrt{2}}{2}) + \langle(-\sqrt{2},-1,0)\rangle$$

y ángulo $2\pi/3$.

Ejemplo 4.45. La aplicación $M_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$M_2(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(x+\sqrt{2}\,y - z\,,\,6+\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,z\,,\,-2+x-\sqrt{2}\,y-z)$$

es un movimiento, puesto que $M_2 = t_{(0,3,-1)} \circ f_1$ donde f_1 es la transformación ortogonal del ejemplo 4.44.

Dado que M_2 no tiene puntos fijos y f_1 es un giro, por el corolario 4.43, M_2 es un movimiento helicoidal, El vector de traslación v de M_2 es la proyección ortogonal de $(0,3,-1)$ sobre $\mathrm{Nuc}(f - 1_{\mathbb{R}^3}) = \langle(\sqrt{2},1,0)\rangle$. Dado que

$$(0,3,-1) = (\sqrt{2},1,0) + \sqrt{2}(-1,\sqrt{2},0) - (0,0,1)$$

se tiene que $v = (\sqrt{2},1,0)$. El eje de M_2 es el eje del giro $t_{(-\sqrt{2},-1,0)} \circ M_2 = M_1$, donde M_1 es el giro del ejemplo 4.44. Si orientamos $\mathrm{Nuc}(\mathrm{f}_1 - 1_{\mathbb{R}^3}) = \langle(\sqrt{2},1,0)\rangle$ con la base $((\sqrt{2},1,0))$, el ángulo de M_2 es $4\pi/3$. Así, M_2 es el movimiento helicoidal de eje orientado la recta

$$r = (\frac{1-3\sqrt{2}}{2}\,,0\,,\frac{-1-\sqrt{2}}{2}) + \langle(\sqrt{2},1,0)\rangle,$$

ángulo $4\pi/3$ y vector de traslación $(\sqrt{2},1,0)$.

Ejemplo 4.46. La aplicación $M_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$M_3(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(2 + x + \sqrt{2}\,y + \ z\,,\ -2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,z\,,\ -2 + x - \sqrt{2}\,y + z).$$

es un movimiento, puesto que $M_3 = t_{(1,-\sqrt{2},-1)} \circ f_3$, donde f_3 es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$, dada por

$$f_3(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(x + \sqrt{2}\,y + \ z\,,\ \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,z\,,\ x - \sqrt{2}\,y + z).$$

El conjunto de puntos fijos de M_3 es el conjunto de puntos del plano Π de ecuación en la referencia canónica $X - \sqrt{2}\,Y - Z = 2$.

Por el corolario 4.43, M_3 es una simetría respecto al plano Π.

Ejemplo 4.47. La aplicación $M_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$M_4(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(2 + 2\sqrt{2} + x + \sqrt{2}\,y + \ z\,,\ -2\sqrt{2} + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,z\,,\ -2 + 2\sqrt{2} + x - \sqrt{2}\,y + z).$$

es un movimiento, puesto que $M_4 = t_{(1+\sqrt{2},-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})} \circ f_3$, donde f_3 es la transformación ortogonal del ejemplo 4.46. Se tiene que f_3 es una reflexión, puesto que $\det f_3 = -1$. Dado que M_4 no tiene puntos fijos y f_3 es una reflexión, por el corolario 4.43, M_4 es una simetría deslizante.

El vector de traslación v de M_4 es la proyección ortogonal de

$$M_4(0,0,0) = (1+\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}),$$

sobre el subespacio $\mathrm{Nuc}(f_3 - 1_{\mathbb{R}^3}) = \langle(\sqrt{2},1,0),(0,1,-\sqrt{2})\rangle$, que es el subespacio dirección de Π. Dado que $\langle(\sqrt{2},1,0),(0,1,-\sqrt{2})\rangle^{\perp} = \langle(\sqrt{2}\,,2,\,\sqrt{2})\rangle$ y que

$$(1+\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}) = (\sqrt{2},1,0) - (0,1,-\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,(\sqrt{2}\,,2,\,\sqrt{2}),$$

entonces, $v = (\sqrt{2}\,,0,\,\sqrt{2})$. Se tiene que $t_{(-\sqrt{2}\,,0,-\sqrt{2})} \circ M_4 = M_3$, siendo M_3 la simetría del ejemplo 4.46. Por tanto, M_4 es la simetría deslizante respecto al plano Π de ecuación en la referencia canónica $X - \sqrt{2}\,Y - Z = 2$ y vector de traslación $(\sqrt{2}\,,0,\,\sqrt{2})$.

Ejemplo 4.48. La aplicación $M_5\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$M_5(x,y,z) = (2 - z\,,\, 2 - y\,,\, 2 + x)$$

es un movimiento, puesto que $M_5 = t_{(2,2,2)} \circ f_5$, donde f_5 es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ dada por $f_3(x,y,z) = (-z,-y,x)$. Calculamos los puntos fijos de M_5:

$$M_5(x,y,z) = (x,y,z) \iff x = 2 - z,\ y = 2 - y,\ z = 2 + x \iff (x,y,z) = (0,1,2).$$

Dado que M_5 tiene un único punto fijo y $f_5 \neq -1_{\mathbb{R}^3}$, M_5 es la composición de un giro y una simetría donde el eje de giro y el plano de simetría son perpendiculares. El polinomio característico de f_5 es $-(x^2+1)(x-1)$ y los autovalores de f_5 son -1, i y $-i$. Por la observación 3.38 f_5 es la composición de un giro g de eje

$$V_{-1} = \mathrm{Nuc}(\mathrm{f} + 1_{\mathbb{R}^3}) = \langle (0,1,0) \rangle,$$

y la simetría respecto a $\langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$.

El ángulo del giro g depende de la orientación en $\langle (0,1,0) \rangle$. Si orientamos $\langle (0,1,0) \rangle$ con la base $((0,1,0))$ y consideramos en $\langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$ la base $((0,0,1),(1,0,0))$, entonces la base $B = ((0,0,1),(1,0,0),(0,1,0))$ es de orientación positiva. Se tiene

$$(f_5)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por la observación 3.38 el ángulo φ del giro g es $3\pi/2$, puesto que $\cos\varphi = 0$, $\mathrm{sen}\,\varphi = -1$. Así, M_5 es la composición del giro de eje orientado $(0,1,2) + \langle (0,1,0) \rangle$ y ángulo $3\pi/2$ y la simetría respecto al plano $(0,1,2) + \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$.

Bibliografía

[1] Burgos Román J. de, *Curso de álgebra y geometría.* Alhambra, Madrid, 1983.

[2] Burgos Román J. de, *Álgebra lineal.* MacGraw-Hill/Interamericana de España, Madrid, 1993.

[3] Hernández Rodríguez, E., *Álgebra y geometría.* Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, DE, 1994.

[4] Hernández Rodríguez, E., Vázquez Gallo, M. J., *Álgebra lineal y geometría.* Pearson, Madrid , 2012.

[5] Lang S., *Analisis I.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[6] Sernesi, E., *Linear álgebra. A geometric aproach.* Chapman & Hall / CRC, London, 1993.

[7] Tisseron, CL., *Géométries affine et euclidienne.* Hermann, Paris, 1998.