



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

MINIMIZACIÓN DE FUNCIONAIS POR MEDIO DO CÁLCULO DE VARIACIÓNS

Tania Alvite Souto

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

MINIMIZACIÓN DE FUNCIONAIS
POR MEDIO DO CÁLCULO DE
VARIACIÓNS

Tania Alvite Souto

07/20

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático

Título: Minimización de funcionales por medio del cálculo de variaciones.

Breve descripción del contenido

En este trabajo se hará una introducción a la teoría del cálculo de variaciones.

Como punto de partida veremos los ejemplos clásicos llegando así a los

problemas de minimización de funcionales, y como consecuencia, a las

ecuaciones de Euler-Lagrange. Además, se presentarán ejemplos físicos y

geométricos donde se aplique esta teoría.

Índice general

Resumen	VIII
1. Introducción	1
1.1. Curva braquistócrona	2
1.2. Braquistócrona terrestre	4
1.3. Geodésicas	5
1.4. Superficies minimales	9
1.5. El problema isoperimétrico	10
2. El método de variación en problemas sujetos a condiciones de contorno	13
2.1. Enfoque de Euler	14
2.2. Enfoque de Lagrange	16
2.2.1. Simplificación de Lagrange	18
2.2.2. La simplificación de Du Bois-Reymond.	20
3. Ejemplos de aplicaciones de la ecuación de Euler-Lagrange	23
3.1. Casos específicos	23
3.1.1. Funcionales degenerados	24
3.1.2. La función f no depende de y	25
3.1.3. La función f es independiente de x	26
3.2. Superficie mínima de revolución	28
3.3. La braquistócrona	29
3.4. Geodésicas	31
4. La primera variación en funcionales de orden superior	35
4.1. Funcionales que involucran una segunda derivada	35
4.1.1. La viga en voladizo	37
4.2. Funcionales con derivadas de orden n	41

5. La segunda variación	43
5.1. Introducción	43
5.2. La condición de Legendre	44
5.3. La condición de Jacobi	46
5.4. Ejemplos	48
6. El problema isoperimétrico	51
6.1. Multiplicadores de Lagrange	51
6.2. Restricción isoperimétrica	52
6.3. El problema de Dido	54
Bibliografía	57

Resumen

En este trabajo veremos cómo comenzó la teoría del cálculo de variaciones. Para ello, se estudiará la minimización de los funcionales desde los ejemplos más clásicos. Esto nos llevará a uno de los resultados más trascendentes en el cálculo variacional, la ecuación de Euler-Lagrange. Además, analizaremos varios ejemplos de cómo aplicar esta ecuación en función de la forma del funcional. También extenderemos los resultados vistos para funcionales con derivadas de orden superior obteniendo la ecuación de la primera y segunda variación. Por último, veremos los multiplicadores de Lagrange para poder abordar el problema isoperimétrico con su famoso ejemplo, el problema de Dido.

Abstract

In this work we will see how the theory of calculus of variation began. To do so, we will study the minimization of the functional ones from the most classic examples. This will lead us to one of the most transcendental results in variational calculus, the Euler-Lagrange equation. Moreover, we will analyze several examples of how to apply this equation as a function of the functional form. We will also extend the results already seen for functionals with higher order derivatives by obtaining the equation of the first and second variation. Finally, we will see the Lagrange multipliers in order to address the isoperimetric problem with its famous example, Dido's problem.

Capítulo 1

Introducción

El cálculo de variaciones es un problema matemático que consiste en buscar máximos y mínimos (o extremos relativos) de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional. Constituyen una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable. Así, es una de las ramas clásicas de las matemáticas.

El cálculo de variaciones comienza con uno de los problemas más antiguos de las matemáticas: la desigualdad isoperimétrica. Un ejemplo de esta desigualdad es el problema de Dido.

En la Europa del siglo XVII se consideraron varios problemas que contribuyeron a la evolución del cálculo de variaciones. Algunas de estos son el trabajo de Fermat sobre óptica geométrica (1662), el problema de Newton (1685) para el estudio de cuerpos que se mueven en fluidos y el problema de la braquistócrona. En este último, Bernoulli desafió a los mejores matemáticos a resolver el problema. Se logró un paso decisivo con el trabajo de Euler y Lagrange, quienes encontraron una forma sistemática de tratar los problemas en este campo al introducir lo que ahora se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange.

Además, el problema de las superficies mínimas, que fue formulado por Lagrange en 1762, también ha tenido una fuerte influencia en el cálculo variacional. Por lo que Ampère, Beltrami, Bernstein, Bonnet, Darboux, Enneper, Haar, Korn, Legendre, Lie, Meusnier, Monge, Müntz, Riemann hicieron muchos intentos para resolver el problema. Finalmente, Douglas y Rado en 1930 dieron, simultánea e independientemente, la primera prueba completa. Una de las dos primeras medallas Fields fue otorgada a Douglas en 1936 por haberlo resuelto. Por último, otro problema a destacar es encontrar geodésicas en superficies convexas que planteó John Bernoulli [7]. De esta forma en 1668, Bernoulli comentó en una carta a Leibniz que las geodésicas siempre tienen planos osculadores que cortan la superficie en ángulo recto. Más tarde, Euler (1732) obtuvo ecuaciones diferenciales para geodésicas en superficies usando el cálculo de variaciones. Este fue el primer uso conocido de Euler del cálculo

variacional.

En lo que sigue del capítulo, examinaremos los cuatro problemas que implican minimizar o maximizar las integrales mediante el cálculo de variaciones. Primero veremos el de la braquistócrona, en particular la braquistócrona terrestre para viajar a través de la tierra. Luego, abordaremos el de encontrar el camino más corto entre dos puntos en una superficie general, es decir, el de las geodésicas. También estudiaremos el problema de minimizar el área de una superficie de revolución y por último el problema isoperimétrico.

1.1. Curva braquistócrona

Bernoulli plantea encontrar el camino más rápido entre dos puntos A y B por el cual un punto móvil M que se mueve bajo la influencia de la gravedad debe proceder en el menor tiempo posible.

Supongamos una partícula M de masa m , en un campo gravitacional vertical de fuerza g , que se mueve a lo largo de la curva $y = y(x)$ entre $A = (a, y_a)$ y $B = (b, y_b)$, siendo $y_b < y_a$. El tiempo T de M viene dado por la siguiente integral,

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds} ds = \int_0^L \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

siendo s la longitud de arco, L la longitud de la curva y v la velocidad [1].

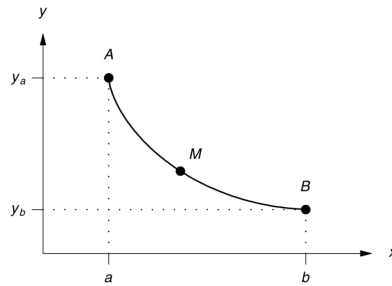


Figura 1.1: Curva de descenso.

Por la ley de conservación de la energía tenemos $E_m = E_c + E_p = cte$. Si M comienza en reposo obtenemos,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy_b = mgy_a$$

y así,

$$v = \sqrt{2g(y_a - y_b)}.$$

Con lo cual, queremos encontrar la curva $y = y(x) \leq y_a$ que minimice la integral

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_a - y}} dx.$$

Varios matemáticos respondieron al desafío de Johann Bernoulli. Las soluciones fueron presentadas por Gottfried Wilhelm Leibniz (1697), Isaac Newton (1695–7, 1697), John Bernoulli (1697), James Bernoulli (1697) y Guillaume l'Hôpital (1697) tal como se puede ver en [6].

Leibniz proporcionó una solución geométrica. Derivó la ecuación diferencial para la braquistócrona, pero no especificó la curva resultante.

La solución anónima de Newton se publicó en Philosophical Transactions. Newton proporcionó la respuesta correcta pero no dio idea de su método.

John Bernoulli halló dos soluciones. La primera se basó en una analogía entre la braquistócrona mecánica y la luz. Su segunda solución, descrita muchos años después, recibió poca atención en el momento, pero ahora se ve como la primera prueba de suficiencia en el cálculo de variaciones.

La solución de James Bernoulli no era tan rigurosa como la de su hermano menor, pero contenía la idea de variar solo un valor de la curva de solución a la vez. Esta idea proporcionó la base para seguir trabajando en el cálculo de variaciones.

Más adelante, veremos que la braquistócrona es la cicloide invertida

$$x(\phi) = a + R(\phi - \sin\phi) \quad y(\phi) = y_a - R(1 - \cos\phi)$$

donde R es el parámetro.

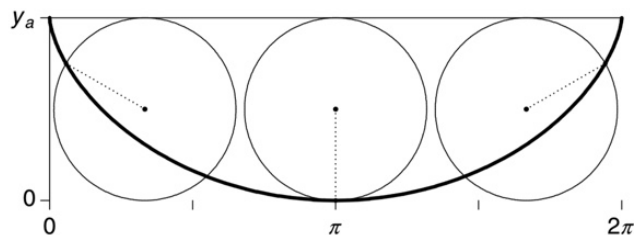


Figura 1.2: Cicloide para $R = \frac{1}{2}y_a$, $a = 0$.

Esta cicloide es la curva definida por el camino seguido por un punto de la circunferencia de un círculo de radio R que rueda a lo largo de la parte inferior de la línea horizontal

$$y = y_a .$$

Además, la tautócrona o curva isócrona es la curva para la cual el tiempo tomado por un objeto que se desliza sin rozamiento en gravedad uniforme hasta su punto más bajo es independiente de su punto de partida. Huygens (1673), identificó una cicloide invertida con la tautócrona o curva isócrona, es decir, la braquistócrona era la tautócrona de Huygens.

1.2. Braquistócrona terrestre

El estudio de la braquistócrona terrestre fue de utilidad para la construcción de los primeros trenes rápidos. L. K. Edwards propuso trenes de tubos que caerían a través de la tierra arrastrados por la gravedad y ayudados por la propulsión neumática [1].

De hecho, un tren neumático fue construido en Nueva York, debajo de Broadway, desde Warren Street hasta Murray Street, en 1870 por Alfred Ely Beach. Este fue el primer metro de la ciudad de Nueva York.

Luego, Cooper (1966) señaló que los acordes en línea recta conducen a viajes innecesariamente largos a través de la tierra. Utilizó el cálculo de variaciones para deducir una ecuación diferencial para los túneles más rápidos a través de la tierra e integró esta ecuación numéricamente.

Para ver el problema de la braquistócrona terrestre más de cerca, supongamos que la Tierra es una esfera homogénea de radio R . Consideramos una sección a través de la Tierra con coordenadas polares centradas en el centro de la Tierra (ver Figura 1.4).

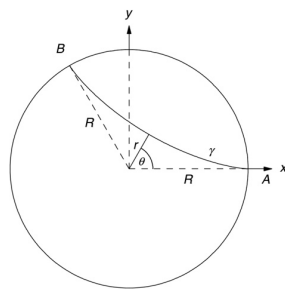


Figura 1.3: Superficie terrestre.

Sea una partícula de masa m que se mueve entre $A = (r_a, \theta_a)$ y $B = (r_b, \theta_b)$, el objetivo es encontrar la curva plana γ que minimice el tiempo T entre A y B , que viene dado por

la integral,

$$T = \int_0^T dt = \int_{\gamma} \frac{dt}{ds} ds = \int_{\gamma} \frac{1}{v} ds$$

donde s es la longitud de arco y v la velocidad de la partícula.

Como estamos en un círculo $f(\theta) = r$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. De esta forma, la longitud de arco viene dada por la siguiente expresión:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

Así, como $r = f(\theta)$ y $dr = f'(\theta)d\theta$ obtenemos

$$T = \int_{\gamma} \frac{1}{v} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Además, la energía potencial gravitacional dentro de la superficie terrestre esférica y homogénea es

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{mg}{R} r^2,$$

donde g es la aceleración gravitatoria.

Aplicando la ley de conservación de energía, teniendo en cuenta que la partícula comienza en reposo en la superficie de la Tierra, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{R} r^2 = \frac{1}{2}mgR.$$

Despejando v se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{g(R^2 - r^2)}{R}}.$$

Por último, sustituyendo este valor de la velocidad, v , en la ecuación del tiempo se sigue que

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\frac{(dr/d\theta)^2 + r^2}{R^2 - r^2}} d\theta.$$

1.3. Geodésicas

Veamos otro clásico problema del cálculo de variaciones, las geodésicas [1]. Sabemos que el camino más corto entre dos puntos en un plano es la línea recta. No obstante, cuando se trata de superficies más generales, a la línea de mínima longitud entre dos puntos se le denomina geodésica y para hallarla debemos minimizar la longitud de arco.

En primer lugar, se estudiará uno de los ejemplos más sencillos. Se consideran dos puntos A y B , en una esfera de radio R centrada en el origen. El objetivo es unir estos dos puntos por la curva más corta y continuamente diferenciable que se encuentre en la esfera, utilizamos

coordenadas cartesianas para especificar la posición $\mathbf{r}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.

Ahora, como los puntos están en la superficie de una esfera se cambia a las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) obteniendo así:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

Por lo que el vector de posición se reescribe,

$$\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \mathbf{i} + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}.$$

Como el vector posición depende de las coordenadas esféricas se tiene

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi.$$

Se denota $h_r = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\|$, $h_\theta = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\|$, $h_\phi = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|$, cuyo valor se obtiene de calcular las tres derivadas parciales y su norma:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\operatorname{sen} \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \theta) \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\| = 1,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \operatorname{sen} \phi, -r \operatorname{sen} \theta) \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = r,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, 0) \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| = r \operatorname{sen} \theta,$$

Así, se reescribe la derivada del vector posición

$$d\mathbf{r} = h_r dr \mathbf{e}_r + h_\theta d\theta \mathbf{e}_\theta + h_\phi d\phi \mathbf{e}_\phi$$

donde \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_ϕ son vectores unitarios en las direcciones r , θ y ϕ .

Por tanto, el elemento de la longitud del arco en coordenadas esféricas viene dado por

$$ds = \sqrt{d\mathbf{r}d\mathbf{r}} = \sqrt{h_r^2(dr)^2 + h_\theta^2(d\theta)^2 + h_\phi^2(d\phi)^2}.$$

Sustituyendo los valores de h_r^2 , h_θ^2 y h_ϕ^2 , se obtiene:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta (d\phi)^2}.$$

Para una esfera de radio $r = R$ se tiene $dr = 0$, entonces

$$ds = R \sqrt{(d\theta)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta (d\phi)^2}.$$

Suponiendo que $\phi = \phi(\theta)$, encontrar la curva que minimiza la longitud de arco entre los puntos $A = (\theta_a, \phi_a)$ y $B = (\theta_b, \phi_b)$ implica encontrar la función $\phi(\theta)$ que minimice la integral

$$s = \int_A^B ds = R \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2} d\theta$$

sujeto a las condiciones contorno $\phi(\theta_a) = \phi_a$, $\phi(\theta_b) = \phi_b$. Más adelante se verá que el camino más corto en las esferas son arcos de círculos.

Para representar otras superficies paramétricamente, se escribe los puntos de la superficie usando los parámetros u y v en forma vectorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

Así, dado un campo escalar espacial r , su derivada material con respecto al tiempo se define de la forma

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \dot{v}$$

es el vector tangente a la curva y a la superficie. Por lo que el cuadrado de la distancia entre dos puntos en una curva es

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right). \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) también se expresa como,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (1.2)$$

donde

$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

La ecuación (1.2) se denomina la primera forma fundamental de la superficie y $E(u, v)$, $F(u, v)$ y $G(u, v)$ magnitudes o cantidades fundamentales de primer orden.

Por tanto, se escribe la distancia entre dos puntos $A = (u_a, v_a)$ y $B = (u_b, v_b)$ en la curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ como

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

con $u(t_a) = u_a$, $v(t_a) = v_a$, $u(t_b) = u_b$ y $v(t_b) = v_b$.

En esta formulación, tenemos dos variables dependientes, u y v , y una variable independiente, t . Para que el problema tenga una variable dependiente y otra independiente, v puede escribirse como una función de u , $v = v(u)$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dt},$$

se puede reescribir la integral como

$$s = \int_{u_a}^{u_b} \sqrt{E + 2F \left(\frac{dv}{du} \right) + G \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du$$

con $v(u_a) = v_a$, $v(u_b) = v_b$.

Ejemplo 1. *El hiperboloide de una hoja, que es el giro de una hipérbola alrededor de un eje de simetría. La ecuación del hiperboloide de una hoja es $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, que se reescribe paramétricamente como,*

$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v)$$

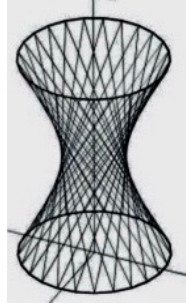


Figura 1.4: Hiperboloide.

Luego,

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (-\sin u - v \cos u, \cos u - v \sin u, 0)$$

y

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-\sin u, \cos u, 1)$$

Las cantidades fundamentales de primer orden se reducen a

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = 1 + v^2,$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 1$$

y

$$G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = 2.$$

Para encontrar una geodésica en el hiperboloide de una hoja, hay que encontrar la curva, $u = u(t)$ y $v = v(t)$ que minimiza la integral de longitud de arco

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{(1 + v^2)(u')^2 + 2u'v' + 2(v')^2} dt$$

sujeto a las condiciones contorno $u(t_a) = u_a$, $v(t_a) = v_a$, $u(t_b) = u_b$ y $v(t_b) = v_b$.
 Este proceso es equivalente a buscar una curva, $v = v(u)$ que minimice la integral

$$s = \int_{u_a}^{u_b} \sqrt{(1 + v^2) + 2 \left(\frac{dv}{du} \right) + 2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du.$$

Nótese que encontrar caminos más cortos es más fácil en superficies simples de revolución. La geodésica en superficies de revolución satisface una primera integral simple o "ley de conservación" que fue publicada por primera vez por Clairaut (1733).

1.4. Superficies minimales

Entre todas las superficies $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ (o más generalmente en \mathbb{R}^n , $n \geq 3$) con frontera predeterminada, $\partial\Sigma = \Gamma$, donde Γ es una curva de Jordan, se pretende encontrar una de área mínima [4].

Desafortunadamente, la formulación del problema en términos más precisos es compleja dependiendo del tipo de superficies que consideremos. Se dividirá en dos clases de superficies: superficies paramétricas y no paramétricas.

En el resto de capítulo, se considerará el caso de $n = 2$. Así, al tratarse del plano, se busca unir dos puntos, $y(a) = y_a$ y $y(b) = y_b$, mediante una curva continuamente diferenciable $y = y(x) \geq 0$ de forma que la superficie de revolución generada al girar la curva alrededor del eje OX , tenga el área s más pequeña posible. Por tanto, el objetivo es minimizar

$$s = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Ahora veremos brevemente los antecedentes históricos del problema considerado [1]. Euler (1744) descubrió que el catenoide, la superficie generada por una catenaria o cadena colgante, minimiza el área de superficie. Luego, Goldschmidt (1831) probó analíticamente que para dos aros coaxiales paralelos de radio r , el área de un catenoide es un mínimo absoluto si la distancia entre los aros es menor a $1,056r$. Esta área es un mínimo relativo para distancias entre $1,056r$ y $1,325r$. Para distancias superiores a $1,325r$, el catenoide se rompe y la solución salta a la solución discontinua de Goldschmidt (dos discos).

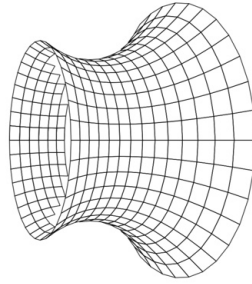


Figura 1.5: Catenoide.

Luego, Joseph Lagrange (1762) propuso el problema general de encontrar una superficie, $z = f(x, y)$, con una curva cerrada C como límite, que tiene el área más pequeña. Es decir, ahora deseamos minimizar una doble integral

$$s = \int \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (1.3)$$

donde $\partial\Omega$ es la proyección de la curva cerrada C en el plano (x, y) y Ω es el interior de esta proyección, este problema se conoce como el problema de Plateau. Lagrange demostró que una superficie que minimiza la integral (1.3) debe satisfacer la ecuación de superficie mínima

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (1.4)$$

Las diferentes restricciones sobre la función $f(x, y)$ producen diferentes superficies minimales.

Jean-Baptiste-Marie-Charles (1785) le dio a la ecuación (1.4) una interpretación geométrica y Meusnier demostró que la ecuación de superficie mínima implica que la curvatura media (el promedio de las curvaturas principales) es cero en cada punto de la superficie de minimización. Como resultado, cualquier superficie con curvatura media cero se denomina típicamente superficie mínima, incluso si no proporciona un mínimo absoluto o relativo.

1.5. El problema isoperimétrico

El problema isoperimétrico, que se encuentra entre las cuestiones más antiguas en el cálculo de variaciones, consiste en hallar de entre todas las curvas cerradas y simples de perímetro fijo, la que encierra una región de mayor área.

Esta cuestión se origina en el siglo IX a.C. cuando la reina Dido negocia con el rey Jarbas un trozo de tierra para fundar una ciudad. Dido utiliza el problema isoperimétrico para obtener la máxima porción de terreno posible.

A lo largo de 2000 años muchos matemáticos intentaron dar la solución al problema. Los primeros grandes avances son del griego Zenodoro (200 a.C.-140 a.C.). Luego, con la aparición del cálculo integral y diferencial surgen intentos de una prueba formal, donde destacan las disputas de los hermanos Bernoulli Jakob y Johann acerca de la solución. Finalmente, en el siglo XIX se plantea que la solución completa sea la resolución para figuras convexas cualesquiera y la demostración de la existencia de tal solución. En 1879, Weierstrass utilizando el cálculo de variaciones presenta esta solución completa.

El planteamiento matemático es el siguiente [2]:

Sea $\alpha, \beta > 0$, encuentra la curva $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$J[y] := \int_0^1 \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds$$

es un mínimo con $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$, y

$$\int_0^1 y(s) ds = A$$

donde $A > 0$ es el área prescrita debajo de la curva.

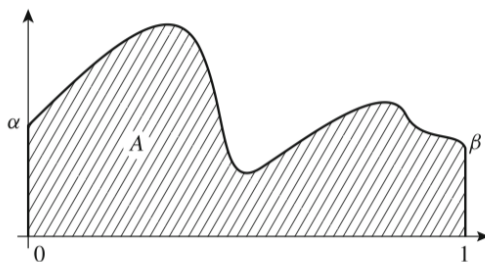


Figura 1.6: El problema isoperimétrico.

Nótese que el problema isoperimétrico es un caso más complicado porque las condiciones de contorno no se fijan en unos puntos concretos del intervalo de definición, sino que se impone una condición global a todo el intervalo. Más adelante se estudiará el problema con más detalle.

Capítulo 2

El método de variación en problemas sujetos a condiciones de contorno

Los problemas variacionales consisten en encontrar máximos o mínimos de funcionales. Los métodos para resolverlos son muy parecidos a los de encontrar máximos de funciones de variable real.

En un primer momento, el objetivo es minimizar o maximizar una integral definida de la siguiente forma

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

sujeto a unas condiciones de contorno.

Un funcional es un operador que asigna números reales a funciones. Obsérvese que los funcionales actúan en los siguientes espacios de funciones conocidos:

1. $C^n[a, b]$ con $n \in \mathbb{N}$, el espacio de funciones de valor real que son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. $D[a, b]$, el espacio de funciones de valor real que son continuas por partes en el intervalo cerrado $[a, b]$.
3. $D^1[a, b]$, el espacio de funciones de valor real que son continuas y que tienen derivadas continuas por partes en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Buscaremos una condición equivalente para encontrar el extremo del funcional. El término extremo para referirse a máximos y mínimos fue introducido por primera vez por Paul du Bois-Reymond (1879).

Uno de los resultados más importantes en el cálculo de variaciones es la ecuación de Euler-

Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Comenzaremos viendo la deducción heurística de Euler (1744), luego la deducción de Lagrange (1755) y por último, consideraremos la modificación de Paul du Bois-Reymond de la derivación de Lagrange (1879) [1].

2.1. Enfoque de Euler

En 1744 fue publicada la obra *Un método para encontrar líneas curvas que disfrutan de propiedades máximas o mínimas* de Leonhard Euler. De esta forma, fue la primera persona en sistematizar el estudio de problemas variacionales.

La idea principal de Euler era pasar de un problema variacional a un problema n -dimensional de máximos y mínimos aplicado a curvas.

Comenzamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en $n + 1$ subintervalos iguales delimitados por

$$x_0 = a, x_1, \dots, x_{n+1} = b.$$

La longitud de cada intervalo es

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{(b - a)}{n + 1}.$$

Ahora substituiremos la función $y(x)$ por la curva poligonal con vértices

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}).$$

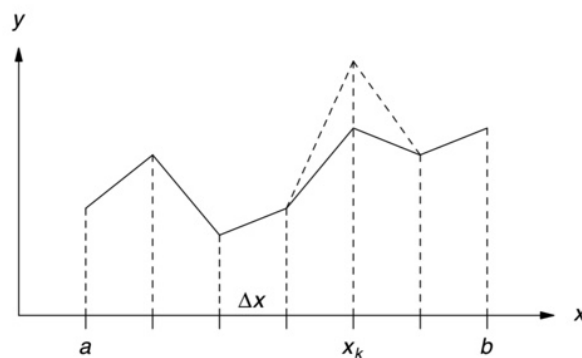


Figura 2.1: Curva poligonal.

Así, podemos aproximar el funcional $J[y]$ por el sumatorio,

$$J(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^n f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x$$

de una función de n variables.

Euler obtiene la ecuación de Euler-Lagrange variando una sola ordenada, $y_i = y(x_i)$. Para ver el efecto de aumentar o disminuir los y_i calculamos la derivada parcial respecto a y_k ,

$$\frac{\partial J}{\partial y_k} = f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \Delta x + f_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) - f_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right). \quad (2.1)$$

Al dividir por Δx la ecuación (2.1) obtenemos

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial J}{\partial y_k} = f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) + \frac{1}{\Delta x} \left[f_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) - f_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \right].$$

Al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos que $\Delta x \rightarrow 0$ y se obtiene la siguiente derivada variacional:

$$\frac{\partial J}{\partial y} = f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y').$$

Esta derivada se anula en cada punto de un mínimo relativo, por lo tanto, se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Observemos que esta condición debe modificarse si la curva de minimización no se encuentra en el interior de la región. Además, la ecuación de Euler-Lagrange es solo una condición necesaria.

Veamos un ejemplo sencillo de la aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange.

Ejemplo 2. *La recta es la forma de curva más corta en el plano.*

Tomamos la recta desde (a, y_a) a (b, y_b) . El objetivo es minimizar la longitud del arco del funcional

$$J[y] = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Como el integrando no depende de y , la ecuación de Euler-Lagrange resultante es

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0.$$

Por lo que integrando lo anterior,

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = k, \quad (2.2)$$

siendo k una constante. Ahora, para obtener el valor de y' , elevamos al cuadrado la ecuación (2.2)

$$y'^2 = k^2(1 + y'^2) \quad (2.3)$$

y despejando y'^2 de (2.3) se obtiene

$$y'^2 = \frac{k^2}{1 - k^2} = c^2$$

siendo c una constante. Esto implica que $y' = c$ o $y' = -c$, suponiendo sin pérdida de generalidad $y' = c$ e integrando una vez más, se consigue la ecuación de una línea recta, $y = cx + d$, donde d es la constante de integración. Ahora, aplicando las condiciones frontera $y(a) = y_a$ y $y(b) = y_b$, obtenemos que el valor de las constantes es

$$c = \frac{y_a - y_b}{a - b}$$

$$d = y_b - \frac{y_a - y_b}{a - b}b.$$

Por lo tanto

$$y(x) = \frac{y_a - y_b}{a - b}x + y_b - \frac{y_a - y_b}{a - b}b$$

2.2. Enfoque de Lagrange

El método de Lagrange para resolver los problemas variacionales es más elegante que el de Euler. De hecho, cuando Euler recibe la carta de Lagrange en 1755, decide adaptar su forma y denominar a este tema el cálculo de variaciones en su honor.

La idea principal de Lagrange consistía en deducir la ecuación variando todas las ordenadas para minimizar o maximizar el funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(a) = y_a$ y $y(b) = y_b$.

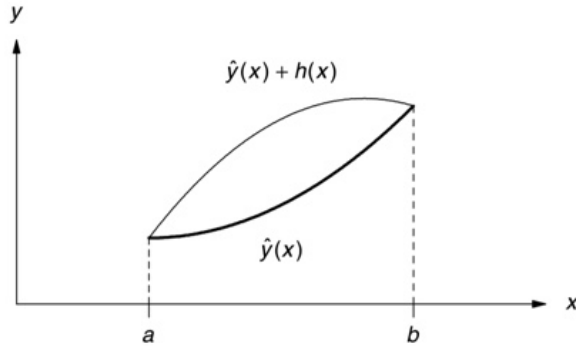


Figura 2.2: Variación.

Para ver el enfoque de Lagrange, supongamos que la función $y = y(x)$ es una solución al problema y tomamos $h(x)$ una variación tal que

$$y(x) = \hat{y}(x) + h(x)$$

con $h(a) = 0$ y $h(b) = 0$ (ver Figura 2.2).

Consideramos pequeñas variaciones donde $h(x) = \varepsilon\eta(x)$ siendo $\eta(a) = 0$ y $\eta(b) = 0$. Además, denotaremos el funcional $J[y]$ en función de ε ,

$$J(\varepsilon) = J[\hat{y} + \varepsilon\eta] = \int_a^b f(x, \hat{y} + \varepsilon\eta, \hat{y}' + \varepsilon\eta') dx.$$

Sea la variación total, $\Delta J = J(\varepsilon) - J(0)$, es decir

$$\Delta J = \int_a^b f(x, \hat{y} + \varepsilon\eta, \hat{y}' + \varepsilon\eta') dx - \int_a^b f(x, \hat{y}, \hat{y}') dx.$$

Supongamos que f tiene suficientes derivadas parciales continuas para así igualar la variación total a una serie de potencias en ε usando series de Taylor, es decir,

$$\Delta J = \varepsilon\delta J + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 J + O(\varepsilon^3).$$

La primera variación es

$$\delta J = \left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'] dx$$

y la segunda variación es

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \int_a^b [f_{yy}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta^2 + 2f_{yy'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta\eta' + f_{y'y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'^2] dx.$$

Observación 1. Hay que tener en cuenta que $\Delta J \geq 0$ si $\delta J = 0$ y $\delta^2 J \geq 0$. Si esto se cumple entonces $J[\hat{y}]$ es un mínimo relativo.

Análogamente, $J[\hat{y}]$ es un máximo relativo si $\delta J = 0$ y $\delta^2 J \leq 0$.

Teorema 2.2.1 (Condición necesaria de la primera variación). Para que el funcional $J[\hat{y}]$ tenga un extremo en $y = \hat{y}(x)$, entonces la primera variación de $J[y]$ tiene que ser nula,

$$\delta J = 0$$

para $y = \hat{y}(x)$ y para todas las variaciones admisibles de $\eta(x)$.

Para factorizar la dependencia de las variaciones admisibles $\eta(x)$ vamos a reescribir la primera variación para que sea una expresión más sencilla y manejable. Veremos la simplificación de Lagrange y la de Du Bois-Reymond.

2.2.1. Simplificación de Lagrange

Tenemos que la expresión de la primera variación es

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'] dx. \quad (2.4)$$

Para simplificarla, Lagrange aplicó integración por partes en el segundo término del integrando,

$$\int_a^b f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta' dx = \eta(x) \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

Como $\eta(a) = 0$ y $\eta(b) = 0$, llegamos a que la ecuación (2.4) se escribe como

$$\varepsilon \int_a^b \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\hat{y}, \hat{y}'} dx = 0 \quad (2.5)$$

para todos los $\eta(x)$.

Además, tenemos que tener en cuenta que se considera $\hat{y}(x)$ dos veces diferenciable debido que al usar integración por partes tenemos que garantizar la existencia de

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

Por tanto, la simplificación de Lagrange nos obliga a que $\hat{y}(x) \in C^2[a, b]$.

Lagrange intuyó sin realizar la demostración formal que el coeficiente $\eta(x)$ de la ecuación (2.5) tenía que ser nulo. Finalmente, la prueba fue realizada por Paul du Bois-Reymond y es conocida como el lema fundamental del cálculo de variaciones.

Lema 1 (Lema fundamental del cálculo de variaciones.). Si $M(x) \in C[a, b]$ y si

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = 0$$

para cada $\eta(x) \in C^1[a, b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, entonces

$$M(x) = 0$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demostración. Supondremos sin pérdida de generalidad que $M(x) > 0$ en algún punto de (a, b) . Además, $M(x) > 0$ en $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ por continuidad y así llegaremos a una contradicción.

Defino

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2(x - x_2)^2 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

Ahora,

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} M(x)(x - x_1)^2(x - x_2)^2dx$$

por lo tanto, el integrando es no negativo, es decir,

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx > 0$$

lo que contradice la hipótesis

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = 0.$$

Concluimos que $M(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. □

Ahora aplicando el lema tomando

$$M(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

se establece la siguiente condición necesaria para un máximo o mínimo relativo:

Teorema 2.2.2 (Condición de Euler-Lagrange). Cada $\hat{y} \in C^2[a, b]$ que produce un extremo relativo de la integral

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')dx$$

satisface la ecuación diferencial de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

2.2.2. La simplificación de Du Bois-Reymond.

Con la simplificación de Lagrange se comienza integrando por partes el segundo término. Sin embargo, con la de Du Bois-Reymond se empezará integrando el primer término de la integral

$$\int_a^b (f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta(x) + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'(x)) dx.$$

Para ello, se asume la continuidad de $f_y(x, y, \hat{y})$ y de $\eta'(x)$ para que la integración por partes este bien definida,

$$\int_a^b f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta dx = [\eta(x)\phi(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \phi(x)\eta'(x)dx \quad (2.6)$$

siendo

$$\phi(x) = \int_a^x f_y(u, \hat{y}(u), \hat{y}'(u))du.$$

Ya que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, se aplica la condición necesaria,

$$\partial J[\eta] = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta']dx = 0. \quad (2.7)$$

Ahora, se reescribe la expresión (2.7) sustituyendo lo obtenido en (2.6)

$$\int_a^b \left[f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}') - \int_a^x f_y(u, \hat{y}(u), \hat{y}'(u))du \right] \eta'(x)dx = 0$$

es decir,

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} du \right)_{\hat{y}, \hat{y}'} \eta'(x)dx = 0.$$

Para continuar veremos el siguiente lema:

Lema 2 (Lema de Du Bois-Reymond.). Si $M(x) \in C[a, b]$ y

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)dx = 0$$

para todo $\eta(x) \in C^1[a, b]$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, luego $M(x) = c$ siendo c una constante para todo $x \in [a, b]$.

Demostración. Sea μ el valor medio de $M(x)$ en $[a, b]$,

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b M(x)dx.$$

Luego,

$$\int_a^b [M(x) - \mu]dx = 0.$$

Ahora definimos la variación $\eta(x)$ como

$$\eta(x) = \int_a^x [M(u) - \mu] du.$$

Como $\eta(x) \in C^1[a, b]$, la derivada de $\eta(x)$ existe y es continua, $\eta'(x) = M(x) - \mu$. Además, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ y aplicando la hipótesis,

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)dx = \int_a^b M(x)[M(x) - \mu]dx = 0.$$

Como,

$$\mu \int_a^b [M(x) - \mu]dx = 0$$

podemos escribir

$$\int_a^b M(x)[M(x) - \mu]dx - \mu \int_a^b [M(x) - \mu]dx = 0. \quad (2.8)$$

Simplificando la expresión (2.8) se obtiene,

$$\int_a^b [M(x) - \mu]^2 dx = 0.$$

Veamos que $M(x) = \mu$ y así deduciremos que $M(x)$ es constante para todas las $x \in [a, b]$. Tenemos que $[M(x) - \mu]^2 \geq 0$, por lo que si existe x_0 tal que $M(x_0) \neq \mu \Rightarrow [M(x) - \mu]^2 > 0$ en $[x_0, x_1] \Rightarrow \int_a^b (M(x) - \mu)^2 dx > 0$ pero esto contradice la ecuación (10). Concluimos que $M(x) = \mu$. \square

Ahora, volvemos a nuestra ecuación

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} du \right) \eta'(x) dx = 0. \quad (2.9)$$

denotamos

$$M(x) = \frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} du$$

continua en $[a, b]$ y como cumple las hipótesis del lema, entonces $M(x) = c$ siendo c una constante. Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} du + c$$

para todo $x \in [a, b]$. Esta última expresión se conoce como la forma integral de la ecuación de Euler-Lagrange.

Concluimos que la ecuación (2.9) es diferenciable y \hat{y} satisface la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Es decir, todas las soluciones con primeras derivadas continuas deben satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange.

Capítulo 3

Ejemplos de aplicaciones de la ecuación de Euler-Lagrange

3.1. Casos específicos

Vamos a estudiar distintas situaciones donde se aplicará la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \quad (3.1)$$

Nótese que para escribir la ecuación (3.1) en forma explícita hay que tener en cuenta que $f_{y'}$ es una función de tres variables x , y e y' y que y e y' son funciones de x . Por lo tanto

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f_{y'}}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}.$$

Así la ecuación de Euler-Lagrange se puede reescribir como

$$f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0. \quad (3.2)$$

Despejando y'' de la expresión (3.2) se obtiene

$$y'' = \frac{1}{f_{y'y'}} (f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y'),$$

por lo que la ecuación de Euler-Lagrange es en general una ecuación de segundo orden.

En primer lugar, veremos el caso de funcionales degenerados, en particular con $f_{y'y} = 0$. Luego, se estudiará con más ejemplos como afecta la no dependencia de y y por último la no dependencia de x de la función f .

3.1.1. Funcionales degenerados

En lo que llevamos visto, el integrando del funcional depende de y' de una manera no lineal. Si el integrando es independiente de y' ,

$$f(x, y, y') = M(x, y)$$

o depende linealmente de y' ,

$$f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'.$$

el problema se denomina degenerado.

En este caso, nuestro funcional es de la forma

$$J[y] = \int_a^b M(x, y) dx$$

o bien,

$$J[y] = \int_a^b M(x, y) + N(x, y)y' dx.$$

Así, la ecuación de Euler-Lagrange para un funcional degenerado es

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' \right) - \frac{dN}{dx}(x, y) = 0.$$

Dado que

$$\frac{dN}{dx}(x, y) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right),$$

tenemos que la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \tag{3.3}$$

Obsérvese que la ecuación (3.3) no es una ecuación diferencial para y , por lo que puede tener o no soluciones dependiendo de las funciones N y M .

En la práctica surgen varios casos, en los cuáles la ecuación de Euler-Lagrange da lugar a una o más curvas que pueden satisfacer o no las condiciones de contorno. Si estas no se satisfacen no podemos resolver el problema como se especifica. Veámoslo en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. *Sea el funcional*

$$J[y] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y') dx$$

se deduce que la ecuación de Euler-Lagrange es

$$x + 2y = 0.$$

La solución a esta ecuación algebraica es $y = -\frac{1}{2}x$, no cumple con la mayoría de las condiciones de contorno.

Ejemplo 4. Sea

$$J[y] = \int_0^1 (y + xy') dx$$

sujeto a las condiciones contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. La ecuación de Euler-Lagrange es $1 - 1 = 0$, es decir, $1 = 1$ la identidad y la integración es independiente del camino del integrando.

$$\int_0^1 (y + xy') dx = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (ydx + xdy) = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(xy) = 1.$$

3.1.2. La función f no depende de y

Consideramos el funcional de la forma

$$J[y] = \int_a^b f(x, y') dx$$

donde la variable y no aparece explícitamente en el integrando.

En este caso, la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (3.4)$$

o bien,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c \quad (3.5)$$

donde c es la constante de integración.

Nótese que como $\partial^2 f / \partial^2 y'^2 \neq 0$, aplicando el teorema de la función implícita a la ecuación (3.5) puede reescribirse como

$$y' = g(x, c)$$

para todo $x \in (a, b)$.

Sin embargo, en la práctica resolver la ecuación (3.5) para y puede resultar imposible.

Veamos un ejemplo de cómo abordar este tipo de problemas.

Ejemplo 5. Sea

$$J[y] = \int_a^b e^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

En este ejemplo, la ecuación de Euler-Lagrange sigue la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{e^x y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c, \quad (3.6)$$

donde c es la constante de integración.

Despejando y' de (3.6) se obtiene

$$y' = \frac{c}{\sqrt{e^{2x} - c^2}}, \quad (3.7)$$

e integrando (3.7) respecto de x se tiene

$$y(x) = \sec^{-1} \left(\frac{e^x}{c} \right) + d$$

donde d es otra constante de integración.

3.1.3. La función f es independiente de x

Sea el funcional

$$J[y] = \int_a^b f(y, y') dx$$

donde el integrando no depende de x de manera explícita.

Ahora la ecuación de Euler-Lagrange es

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = f_y - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'' = 0. \quad (3.8)$$

Además, veamos el siguiente resultado [5]:

Teorema 3.1.1. *Sea J el funcional de la forma*

$$J[y] = \int_a^b f(y, y') dx$$

y definimos la función H como

$$H(y, y') = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f.$$

Luego H es constante a lo largo de cualquier extremo de J .

Demostración. Supongamos que y es un extremo de J . Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H(y, y') &= \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) \\ &= y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \left(y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ &= y' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

y como y es un extremo se cumple la ecuación de Euler-Lagrange (3.1), por tanto

$$\frac{d}{dx} H(y, y') = 0$$

con lo cual

$$H(y, y') = c$$

siendo c una constante. □

Ejemplo 6. Veamos la solución de la ecuación de Euler-Lagrange en los siguientes funcionales [9]:

1. Sea

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + 2y) dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(0) = 0, y(1) = 1$.

La ecuación de Euler-Lagrange en este caso es

$$2 - 2 \frac{d}{dx} y'(x) = 0,$$

es decir,

$$y''(x) = 1.$$

Por lo tanto,

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + ax + b$$

donde a y b son constantes.

Aplicando las condiciones contorno se obtiene

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x).$$

2. Sea

$$J[y] = \int_0^2 ((y')^2 + 2yy' + y^2) dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(0) = 0, y(2) = 1$.

La ecuación de Euler-Lagrange para este funcional es

$$2y' + 2y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0,$$

esto es,

$$y'' - y = 0.$$

Por lo que se obtiene la siguiente solución

$$y(x) = ce^x + de^{-x}.$$

Aplicando las condiciones contorno se tiene

$$y(x) = \frac{1}{e^2 - e^{-2}} e^x - \frac{1}{e^2 - e^{-2}} e^{-x},$$

equivalentemente

$$y(x) = \frac{\sinh x}{\sinh 2}.$$

3.2. Superficie mínima de revolución

El problema consiste en minimizar el área de una superficie de revolución

$$J[y] = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

sujeto a unas condiciones de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ [5].

Como x no está explícitamente en el integrando, aplicando el Teorema 3.1.1 se obtiene

$$\begin{aligned} H(y, y') &= y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2} \\ &= \frac{y'^2 y - y(1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c. \end{aligned}$$

donde c es una constante.

En consecuencia, cualquier extremo debe satisfacer

$$\frac{y^2}{1 + y'^2} = c^2. \quad (3.9)$$

Si $c = 0$, la solución de (3.9) es $y = 0$.

Suponiendo $c \neq 0$, para hallar la solución despejamos y' ,

$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}. \quad (3.10)$$

Ahora integrando (3.10),

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}} = c \ln \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} \right) + d$$

siendo d la constante de integración. Además,

$$ce^{(x-d)/c} = y + \sqrt{y^2 - c^2}, \quad (3.11)$$

$$ce^{-(x-d)/c} = \frac{c^2}{y + \sqrt{y^2 - c^2}} \quad (3.12)$$

sumando (3.11) y (3.12) se obtiene,

$$c \left(e^{(x-d)/c} + e^{-(x-d)/c} \right) = y + \sqrt{y^2 - c^2} + \frac{c^2}{y + \sqrt{y^2 - c^2}} = 2y.$$

Por tanto, los extremos son

$$y(x) = \frac{c \left(e^{(x-d)/c} + e^{-(x-d)/c} \right)}{2} = c \cosh \left(\frac{x-d}{c} \right) \quad (3.13)$$

donde las constantes c y d están determinadas por las condiciones de contorno.

Para ver el problema más de cerca, vamos a establecer unas condiciones de contorno simétricas. Así, el problema se reduce al de encontrar una función y de una sola variable x cuyo gráfico genere la superficie de revolución que tiene un área superficial mínima.

Sean las condiciones de contorno $y(-h) = k$, $y(h) = k$. Sustituyendo en (3.13) obtenemos,

$$k = c \cosh\left(\frac{-h-d}{c}\right) = c \cosh\left(\frac{h-d}{c}\right)$$

esto implica que $d = 0$ y que $k = c \cosh(h/c)$.

Ahora, denotamos $z = h/c$, $m = k/h$ y así

$$\cosh z = mz. \tag{3.14}$$

Para resolver la ecuación trascendental (3.14) tenemos que representar el lado izquierdo y derecho de esta como funciones de z y buscar intersecciones.

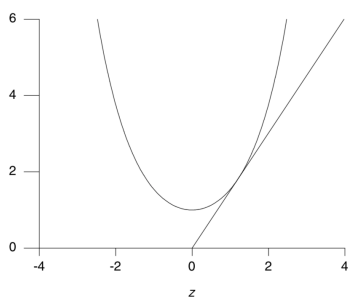


Figura 3.1: Intersección con catenaria.

Luego, si m es suficientemente grande tenemos dos raíces y dos catenarias que satisfacen las condiciones de contorno.

Si los dos extremos están separados por un caso crítico $m = m_c$, $z = z_c$, que corresponde a la raíz doble $\cosh z_c = m_c z_c$ y $\sinh z_c = m_c$, se obtiene

$$\tanh z_c = \frac{1}{z_c}$$

cuya solución aproximada es $z_c \approx 1,199679$, lo que implica que $m_c \approx 1,5088$. Para $m > m_c$ las dos catenarias resuelven las condiciones de contorno.

3.3. La braquistócrona

Como hemos visto anteriormente, el problema consistía en que una masa, inicialmente en reposo, que se mueve entre dos puntos se desliza bajo la acción de la gravedad en un

tiempo mínimo. Se especifican los puntos iniciales y finales y se supone que el movimiento no tiene fricción. Es decir, queremos minimizar

$$T = \int_a^b \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (3.15)$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ [1].

Por la ley de conservación de la energía obtenemos,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy_b = mgy_a \quad (3.16)$$

y despejando v de esta última ecuación (3.16),

$$v = \sqrt{2g(y_a - y)}.$$

Por lo que nuestro problema (3.15) se transforma en

$$J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_a - y}} dx$$

sujeto a las condiciones de contorno.

Ahora, para tener una expresión más sencilla tomamos $z = y_a - y$ y así

$$J[z] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + z'^2}{z}} dx.$$

La no dependencia explícita de x implica que la ecuación de Euler-Lagrange es de la forma

$$f - z' \frac{\partial f}{\partial z'} = \alpha,$$

es decir,

$$\sqrt{\frac{1 + z'^2}{z}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{z' z'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{1}{\sqrt{z(1 + z'^2)}} = \alpha.$$

A continuación, despejamos z'

$$z' = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 z}{\alpha^2 z}}$$

y resolvemos la ecuación diferencial,

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{\alpha^2 z}{1 - \alpha^2 z}} dz.$$

Además, tomando

$$z = \frac{1}{\alpha^2} \sin^2 \theta \Rightarrow dz = \frac{2}{\alpha^2} \sin \theta \cos \theta,$$

nuestra ecuación diferencial se reduce a

$$\int dx = \int \frac{2}{\alpha^2} \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \text{sen} \theta \cos \theta d\theta \Rightarrow \int \alpha^2 dx = \int 2 \text{sen}^2 \theta d\theta$$

y como $\text{sen}^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$, se obtiene

$$\alpha^2 x = \theta - \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) + \beta$$

donde β es la constante de integración.

Por último, como

$$y = y_a - z = y_a - \frac{1}{\alpha^2} \text{sen}^2 \theta = z = \frac{1}{\alpha^2} (1 - \cos(2\theta))$$

nuestra solución en forma paramétrica es

$$x(\phi) = a + R(\phi - \text{sen} \phi)$$

$$y(\phi) = y_a - R(1 - \cos \phi)$$

siendo $R = 1/\alpha^2$, $\phi = 2\theta$, $a = \beta/(2\alpha^2)$.

Observamos que la ecuación obtenida es la de una cicloide.

3.4. Geodésicas

Como ya hemos visto en el Capítulo 1, la geodésica es la línea de mínima longitud sobre una superficie entre dos puntos dados.

Sea la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

para encontrar la geodésica entre $A = (u_a, v_a)$ y $B = (u_b, v_b)$ se minimizaba la integral

$$s = \int_{u_a}^{u_b} \sqrt{E + 2F \left(\frac{dv}{du}\right) + G \left(\frac{dv}{du}\right)^2} du$$

sujeto a las condiciones de contorno $v(u_a) = v_a$, $v(u_b) = v_b$.

Recordamos que

$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

son las cantidades fundamentales de primer orden.

Ahora, aplicando la ecuación de Euler-Lagrange para superficies generales se obtiene

$$\frac{E_v + 2F_v v' + G_v v'^2}{2\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} - \frac{d}{du} \left[\frac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} \right] = 0. \quad (3.17)$$

Esta ecuación (3.17) se simplifica en función de la superficie.

Veamos el caso de la superficie de revolución tomando el eje z como eje de rotación,

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u) \cos(v)\mathbf{i} + f(u) \sin(v)\mathbf{j} + h(u)\mathbf{k}.$$

Así, las cantidades fundamentales de primer orden son

$$E = [f'(u)]^2 + [h'(u)]^2, \quad F = 0, \quad G = [f(u)]^2,$$

por lo que la ecuación de Euler-Lagrange resulta ser

$$\frac{d}{du} \left[\frac{Gv'}{\sqrt{E + Gv'^2}} \right] = 0,$$

es decir,

$$\left[\frac{Gv'}{\sqrt{E + Gv'^2}} \right] = c$$

siendo c la constante de integración.

Además, despejando $v'(u)$ se obtiene

$$v'(u) = \sqrt{\frac{c^2 E}{G^2 - c^2 G}}$$

e integrando

$$v(u) = c \int \sqrt{\frac{E}{G^2 - c^2 G}} du.$$

Por otra parte, cuando la variable independiente u no aparezca explícitamente y $F = 0$, la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a

$$\sqrt{E + G(v')^2} - \frac{G(v')^2}{\sqrt{E + G(v')^2}} = c.$$

Ejemplo 7. Geodésica en la esfera.

Consideraremos la esfera unidad cuya parametrización es

$$\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

para $u \in (0, \pi)$ y $v \in (0, 2\pi)$.

Las cantidades fundamentales de primer orden son:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)^2 = 1, \\ F &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \\ &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \cdot (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) = 0, \end{aligned}$$

$$G = \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v, 0)^2 = \operatorname{sen}^2 u.$$

Por tanto, la longitud de arco es la integral

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{u'^2 + v^2 \operatorname{sen}^2 u} \, u dt.$$

La ecuación de Euler-Lagrange resulta ser

$$\frac{d}{du} \left[\frac{Gv'}{\sqrt{E + Gv'^2}} \right] = \frac{d}{du} \left[\frac{\operatorname{sen}^2 u \cdot v'}{\sqrt{1 + v'^2 \operatorname{sen}^2 u}} \right] = 0,$$

es decir,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 u \cdot v'}{\sqrt{1 + v'^2 \operatorname{sen}^2 u}} = c$$

siendo c una constante.

Capítulo 4

La primera variación en funcionales de orden superior

4.1. Funcionales que involucran una segunda derivada

Los razonamientos que llevan a la ecuación de Euler-Lagrange se pueden extender a funcionales que contienen derivadas superiores [5].

Sea el problema de maximizar o minimizar la integral del funcional de la forma

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, $y'(a) = y'_a$, $y'(b) = y'_b$. Asumimos que f tiene derivadas parciales continuas de tercer orden con respecto a x, y, y' y y'' y que $y \in C^4[a, b]$.

Ahora, suponemos que existe una solución $y = \hat{y}(x)$ y añadimos una pequeña variación a esta solución,

$$y(x) = \hat{y}(x) + \varepsilon \eta(x).$$

Esta función debe satisfacer las condiciones de contorno, por lo que $\eta(x)$ y su derivada tiene que cumplir $\eta(a) = 0$, $\eta(b) = 0$, $\eta'(a) = 0$, $\eta'(b) = 0$.

Gracias al teorema de Taylor sabemos que

$$\begin{aligned} f(x, \hat{y}, \hat{y}', \hat{y}'') &= f(x, y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', y'' + \varepsilon \eta'') = \\ &= f(x, y, y', y'') + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Considerando la diferencia $J(\hat{y}) - J(y)$ se obtiene

$$J(\hat{y}) - J(y) = \varepsilon \int_a^b \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx + O(\varepsilon^2).$$

Así, la primera variación para el funcional es

$$\delta J(\eta, y) = \varepsilon \int_a^b \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx.$$

Para simplificar esta expresión utilizamos la integración por partes,

$$\begin{aligned} \int_a^b \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx &= \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx, \\ \int_a^b \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} dx &= \eta' \frac{\partial f}{\partial y''} \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \eta' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx = \\ &= \left[\eta' \frac{\partial f}{\partial y''} - \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \eta \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx = \\ &= \int_a^b \eta \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las condiciones de contorno $\eta(a) = 0$, $\eta'(a) = 0$, $\eta(b) = 0$ y $\eta'(b) = 0$. Por lo tanto, la primera variación se simplifica a

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b \eta \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right] dx.$$

Teniendo en cuenta que para tener un máximo o mínimo relativo se tiene que verificar que $\delta J = 0$, se deduce que \hat{y} debe satisfacer la ecuación de cuarto orden

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0. \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1) se puede simplificar dependiendo de la forma del funcional. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 8. *Pretendemos minimizar el funcional*

$$J[y] = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + 2yx^3) dx$$

para funciones de clase C^4 que cumplen las condiciones de contorno $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = -1$.

La ecuación (4.1) en este caso es

$$-2y + x^3 + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0,$$

que podemos reescribir como

$$y^{(4)} - y + x^3 = 0.$$

Así la solución general es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x - x^3.$$

Por último, aplicando las condiciones de contorno se obtendría el valor de las constantes c_1 , c_2 , c_3 y c_4 .

Ejemplo 9. Sea el funcional

$$J[y] = \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \mu y'^2 - \rho y \right) dx,$$

donde ρ y μ son constantes y las condiciones de contorno son $y(-l) = y'(-l) = 0$ y $y(l) = y'(l) = 0$ [3].

La ecuación de Euler-Lagrange de orden superior para este ejemplo es

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2}(\mu y'') = 0,$$

equivalentemente

$$y^{(4)}(x) = -\frac{\rho}{\mu}.$$

La solución general es

$$y(x) = -\frac{\rho x^4}{24\mu} + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

Ahora aplicando las condiciones de contorno se tiene

$$y(x) = -\frac{\rho}{24\mu}(x^4 - 2l^2 x^2 + l^4),$$

es decir,

$$y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2.$$

4.1.1. La viga en voladizo

En esta sección deduciremos la ecuación para la forma de una viga en ángulo, fija en un extremo y libre en el otro bajo una carga uniforme [1]. Para este ejemplo, hay una fuerza externa, la gravedad, y fuerzas internas que aparecen por las tensiones dentro de la viga. Además, la energía potencial total está formada por la energía de deformación elástica y la energía potencial gravitacional.

En primer lugar, supongamos una viga recta de sección transversal uniforme (ver Figura 4.1).

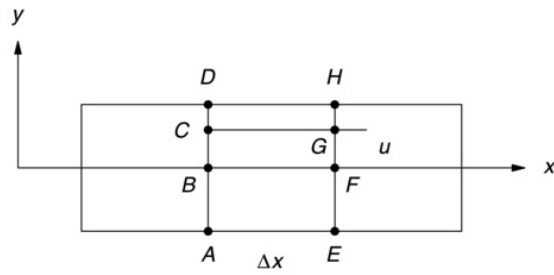


Figura 4.1: La viga recta.

Para continuar, realizamos una flexión sobre el plano (x, y) asumiendo que no hay tensión de corte lateral, y que cada sección transversal de la barra permanece plana y perpendicular a las fibras longitudinales de la barra. A medida que la viga se dobla, las fibras longitudinales por encima del eje $0X$ original se acortan, mientras que las fibras longitudinales por debajo del eje $0X$ se alargan. Asumiremos que la fibra central, el eje neutro, permanece sin tensión y que R es el radio de curvatura de este eje neutro.

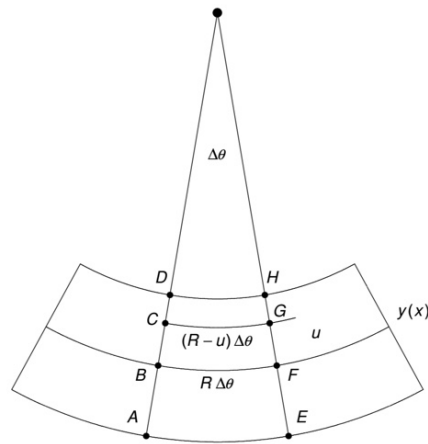


Figura 4.2: La viga doblada.

Veamos cuál es la tensión después de doblar una de las fibras. Sea por ejemplo la fibra CG a una distancia u sobre el eje neutro. Es evidente que antes de doblar la viga, esta fibra tiene la misma longitud que BF (ver Figura 4.1)

$$CG = BF = R\Delta\theta.$$

Después de doblar, esta fibra es más corta,

$$CG = (R - u)\Delta\theta.$$

La deformación ϵ es simplemente el cambio proporcional en longitud,

$$\epsilon = -\frac{u\Delta\theta}{R\Delta\theta} = -\frac{u}{R}. \quad (4.2)$$

Además, la curvatura se puede escribir como

$$k(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}},$$

donde $y(x)$ es el desplazamiento vertical del eje neutro.

Por lo tanto, la ecuación (4.2) es

$$\epsilon = -\frac{uy''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Teniendo en cuenta que la viga es linealmente elástica podemos aplicar la ley de Hooke, por lo que la tensión en la fibra CG es

$$\sigma = E\epsilon,$$

donde E es el módulo de Young (o módulo de elasticidad). Por otro lado, la tensión de densidad de energía provocada por el estrés en las fibras viene dada por la siguiente expresión:

$$U_0 = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon = \int_0^\epsilon E\epsilon d\epsilon = \frac{E}{2}\epsilon^2 = \frac{E}{2} \frac{(uy'')^2}{(1 + y'^2)^3}.$$

Ahora, para obtener la energía de deformación total basta integrar la densidad de energía de deformación sobre el volumen del haz doblado,

$$U = \int_V U_0 dV = \int_0^l \int_A U_0 dA ds.$$

Al substituir el valor de U_0 y aplicando que

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

se tiene que la energía de deformación total es

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^b \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^{5/2}} dx,$$

donde

$$I = \int_A u^2 dA$$

y el límite de integración b es, en una primera aproximación, igual a l .

Finalmente, consideramos una viga elástica en voladizo uniforme fija en un extremo y libre en el otro bajo una carga uniforme. Obsérvese que el eje OY está en dirección hacia abajo para tener desviaciones positivas.

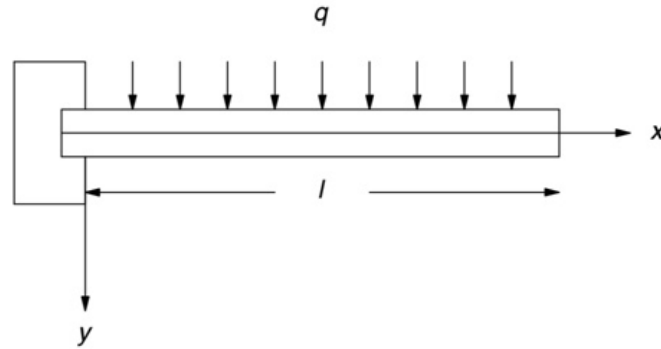


Figura 4.3: La viga voladiza.

En este caso, la energía potencial total del sistema deformado es

$$V = \int_0^b \left[\frac{EI}{2} \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^{5/2}} - qy(1 + y'^2)^{1/2} \right] dx, \quad (4.3)$$

donde se tiene en cuenta la pérdida de energía potencial debido a la carga externa q ,

$$- \int_0^l qy ds.$$

La integral (4.3) es muy complicada de resolver por lo que vamos a suponer que la desviación del haz es pequeña para así eliminar los términos de segundo grado de $y'(x)$ y obtener

$$V \approx \int_0^b \left(\frac{EI}{2} y''^2 - qy \right) dx.$$

Por lo tanto, la ecuación de Euler-Lagrange para derivadas de orden superior se reduce a

$$EIy''' - q = 0$$

y las condiciones de contorno en el extremo sujeto son $y(0) = y'(0) = 0$. Como en el otro extremo no hay condiciones contorno predefinidas en su lugar se aplican las condiciones $EIy'''(b) = 0$, $EIy''(b) = 0$.

4.2. Funcionales con derivadas de orden n

Veamos los extremos para el funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$

donde la función f contiene derivadas de orden n y las condiciones de contorno son de la forma

$$\begin{aligned} y(a) = y_a, \quad y'(a) = y'_a, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_a^{(n-1)}, \\ y(b) = y_b, \quad y'(b) = y'_b, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_b^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Supongamos que $y = y(x)$ es una curva $2n$ veces diferenciable y que $y = \hat{y}(x)$ es otra curva $2n$ veces diferenciable [3].

Ahora, consideramos la familia de funciones

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\hat{y}(x) - y(x)),$$

para $\alpha = 0$ tenemos que $y(x, \alpha) = y(x)$ y para $\alpha = 1$, $y(x, \alpha) = \hat{y}(x)$.

Si tomamos los valores del funcional $J[y]$ de la curva $y(x, \alpha) = y$ entonces el funcional tiene un extremo para $\alpha = 0$. Por lo que,

$$\frac{d}{d\alpha} J(y(x, \alpha))|_{\alpha=0} = 0.$$

Esta derivada se conoce como la variación del funcional J ,

$$\begin{aligned} \delta J &= \left[\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha), \dots, y^{(n)}(x, \alpha)) dx \right]_{\alpha=0} = \\ &= \int_a^b (f_y \delta y + f_{y'} \delta y' + f_{y''} \delta y'' + \dots + f_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora utilizando integración por partes en cada término

$$\begin{aligned} \int_a^b f_{y'} \delta y' dx &= [f_{y'} \delta y]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} f_{y'} \delta y dx, \\ \int_a^b f_{y''} \delta y'' dx &= [f_{y''} \delta y']_a^b - \left[\frac{d}{dx} f_{y''} \delta y \right]_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \delta y dx, \\ \int_a^b f_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx &= [f_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)}]_a^b - \left[\frac{d}{dx} f_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)} \right]_a^b + \dots + (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} \delta y dx, \end{aligned}$$

y aplicando las condiciones de contorno simplificamos la expresión (4.4) obteniendo

$$\delta J = \int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} f_{y'''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} \right) \delta y dx.$$

Además, si el funcional tiene extremos entonces $\delta J = 0$, esto equivale a satisfacer la ecuación diferencial de orden $2n$:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} f_{y'''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0.$$

Capítulo 5

La segunda variación

5.1. Introducción

Sea de nuevo el problema de maximizar o minimizar el funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

Vamos a ver que existen otras condiciones necesarias además de la ecuación de Euler-Lagrange.

Para ello, como hemos visto anteriormente la primera variación resulta ser

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'] dx$$

y la segunda variación es

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b [f_{yy}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta^2 + 2f_{yy'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta\eta' + f_{y'y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'^2] dx.$$

Ahora, enunciamos el siguiente teorema [1]:

Teorema 5.1.1 (Condición de la segunda variación). *Para que el funcional $J[y]$ tenga un máximo relativo en $y = \hat{y}(x)$, $\hat{y}(x) \in C^1[a, b]$, es necesario que la segunda variación sea negativa o cero,*

$$\delta^2 J \leq 0$$

para todo $\eta(x) \in C^1[a, b]$ que verifica que $\eta(a) = 0$, $\eta(b) = 0$.

Análogamente para que tenga un mínimo relativo es necesario que

$$\delta^2 J \geq 0.$$

5.2. La condición de Legendre

En este capítulo vamos a estudiar la condición de Legendre, es decir, una condición necesaria para que un funcional tenga un extremo local. Para ello, vamos a reescribir la segunda variación de la siguiente manera:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2) dx$$

donde $P \equiv f_{yy}(x, \hat{y}, \hat{y}')$, $Q \equiv f_{yy'}(x, \hat{y}, \hat{y}')$, $R \equiv f_{y'y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')$ [1].

Además, sea $w \in C^1[a, b]$ tal que

$$\int_a^b \frac{d}{dx} [w(x)\eta^2(x)] dx = w(x)\eta^2(x)|_{x=a}^{x=b} = 0,$$

al añadir esta expresión a la segunda variación se obtiene

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b ((P + w')\eta^2 + 2(Q + w)\eta\eta' + R\eta'^2) dx.$$

Al completar cuadrados se tiene:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b \left[R \left(\eta' + \frac{Q + w}{R} \eta \right)^2 + \left((P + w') - \frac{(Q + w)^2}{R} \right) \eta^2 \right] dx. \quad (5.1)$$

Gracias a establecer la restricción

$$w' = -P + \frac{(Q + w)^2}{R}$$

podemos reescribir (5.1) como

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b R \left(\eta' + \frac{Q + w}{R} \eta \right)^2 dx,$$

así el signo de la segunda derivada depende del signo de $R (f_{y'y'})$.

Teorema 5.2.1 (Condición de Legendre). *Sea el funcional $J[y]$ de la forma*

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y', y'') dx.$$

La condición necesaria para que J tenga un mínimo local en $y = \hat{y}(x)$ es que

$$R(x) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) \geq 0$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demostración. Supongamos que $R(c) < 0$ para $c \in (a, b)$.

Como $R(x)$ es continua, existe un intervalo $[c - \delta_1, c + \delta_1]$ en $[a, b]$ donde $R(x) < 0$. Además, existe otro intervalo $[c - \delta_2, c + \delta_2]$ en $[a, b]$ donde la ecuación

$$w' = -P + \frac{(Q + w)^2}{R}$$

tiene una solución continuamente diferenciable. Sea $[x_1, x_2]$ el intervalo más pequeño de estos dos y tomamos $\eta(x)$ tal que

$$\eta(x) = 0, \quad x \notin (x_1, x_2),$$

$$\eta(x) \neq 0, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Además, $\eta \in C^1[a, b]$,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \eta'(x_1) = \eta'(x_2) = 0.$$

Para este intervalo tenemos que a la segunda variación

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2) dx,$$

se le puede aplicar la transformación de Legendre obteniendo de esta forma lo siguiente:

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} R \left(\eta' + \frac{Q + w}{R} \eta \right)^2 dx. \quad (5.2)$$

Veamos que esta integral (5.2) es negativa. Así, veamos el caso de que la ecuación se anule, necesariamente

$$\eta'(x) + \frac{Q + w}{R} \eta(x) \equiv 0 \quad (5.3)$$

para $x_1 \leq x \leq x_2$ siendo $R(x) < 0$ en este intervalo.

La ecuación (5.3) y la condición de $\eta(x_1) = 0$ implica que $\eta(x) \equiv 0$ en $x \in (x_1, x_2)$. Sin embargo, en este intervalo habíamos tomado $\eta(x) \neq 0$ por lo que este caso no puede darse. Concluimos que la integral (5.2) es negativa.

Hemos probado que si $R(c)$ es negativo y eligiendo una variación con unas ciertas condiciones obtenemos que $\delta^2 J < 0$. Esto contradice el hecho de la existencia de mínimo.

Por lo tanto $R(x) \geq 0$ en $[a, b]$. □

Ejemplo 10 (Superficie mínima de revolución). *Dado el funcional*

$$J[y] = \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

sujeto a las condiciones contorno $y(0) = -1, y(1) = 1$. Se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \frac{y}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (5.4)$$

por lo que (5.4) es positivo cumpliendo así la condición de Legendre si $y(x) > 0$.

5.3. La condición de Jacobi

En esta sección estudiaremos una condición suficiente para garantizar la existencia de un mínimo relativo. Para ello, tendrán gran importancia las ecuaciones de Riccati [8] que se caracterizan por ser ecuaciones diferenciales no lineales y de la forma

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x).$$

En particular, la ecuación

$$w' = -P + \frac{(Q + w)^2}{R} \quad (5.5)$$

es una ecuación diferencial ordinaria de Riccati y para resolverla supongamos conocida a priori una solución:

$$w(x) = -Q - R \frac{u'(x)}{u(x)}$$

siendo $u(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$.

Ahora derivando dicha solución se tiene

$$w'(x) = -Q' - R \frac{u'(x)}{u(x)} - R \frac{u''(x)u(x) - (u'(x))^2}{u(x)^2}. \quad (5.6)$$

Al igualar las expresiones (5.5) y (5.6) resulta que

$$-P + \frac{(Q + w)^2}{R} = -Q' - R \frac{u'(x)}{u(x)} - R \frac{u''(x)u(x) - (u'(x))^2}{u(x)^2}.$$

Operando en esta última expresión se tiene

$$\left(\frac{Q' - P}{R}\right)u + \frac{(Q + w)^2 u}{R^2} = -\frac{R'}{R}u'(x) - u''(x) - \frac{u'(x)^2}{u(x)} \quad (5.7)$$

y substituyendo el valor de w en (5.7) se obtiene lo que se conoce como la ecuación de Jacobi

$$\left(\frac{Q' - P}{R}\right)u + \frac{R'}{R}u'(x) + u''(x) = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dx}(Ru') + (Q' - P)u = 0.$$

Ahora, la segunda variación

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b R \left(\eta' + \frac{Q + w}{R} \eta \right)^2 dx$$

se transforma en

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b R \left(\eta' - \frac{u'}{u} \eta \right)^2 dx.$$

Por lo que podemos enunciar la condición de suficiencia [1]:

Teorema 5.3.1. Para $y = \hat{y}(x)$, si $R(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$ y la ecuación de Jacobi tiene una solución $u = u(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\delta^2 J$ es definida positiva. Esto es, $\delta^2 J > 0$ cuando la variación $\eta(x)$ no sea idénticamente 0.

Demostración. Si la ecuación de Jacobi tiene una solución distinta a 0 en el intervalo $[a, b]$, podemos llevar a cabo la transformación de Legendre de la segunda variación obteniendo

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} R \left(\eta' + \frac{Q+w}{R} \eta \right)^2 dx.$$

Para $R(x) > 0$, la segunda variación se anula si

$$\eta' - \frac{u'}{u} \eta \equiv 0 \tag{5.8}$$

para todo $x \in [a, b]$. Como $\eta(a) = \eta(b) = 0$ y u no se anula en estos puntos, la única solución para la ecuación diferencial (5.8) es $\eta(x) = 0$.

□

Ejemplo 11. Minimizar la integral

$$J[y] = \int_1^2 x^2 y'^2 dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(1) = 0, y(2) = 1$.

Aplicar la condición de suficiencia de Jacobi y la condición de Legendre para determinar si la solución es un mínimo.

La ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

para este ejemplo es

$$2x^2 y' = c$$

donde c es una constante.

Así, despejando y'

$$y'(x) = \frac{c}{x^2}$$

e integrando con respecto a x se tiene

$$y(x) = \frac{cx^3}{6} + a,$$

siendo a otra constante.

Ahora, aplicando las condiciones de contorno se obtiene

$$y(x) = \frac{x^3}{7} - \frac{1}{7}.$$

Veamos que la condición de Legendre se verifica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'} (2y'x^2) = 2x^2 > 0.$$

Queda por estudiar que la ecuación de Jacobi tenga una solución $u(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$ ya que así $\delta^2 J$ es definida positiva.

Tenemos que $Q = 0$, $P = 0$ y $R = 2x^2$ por lo que

$$\frac{d}{dx}(Ru') + (Q' - P)u = 0$$

equivale para este ejemplo a que $2x^2u' = d$, es decir,

$$u(x) = -\frac{d}{2x}$$

siendo d una constante distinta de 0.

5.4. Ejemplos

Problema 1. Sea el funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Obtener la expresión de la tercera variación de $J[y]$.

Solución 1. Supongamos que f tiene suficientes derivadas parciales continuas para así igualar la variación total a una serie de potencias en ε usando series de Taylor,

$$\Delta J = \varepsilon \delta J + \frac{\varepsilon^2}{2!} \delta^2 J + \frac{\varepsilon^3}{3!} \delta^3 J + O(\varepsilon^4).$$

La tercera variación es

$$\delta^3 J = \frac{d^3 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^3} \varepsilon^3 = \varepsilon^3 \int_a^b \left(\eta'^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y'^3} + 3\eta'^2 \eta \frac{\partial^3 f}{\partial y'^2 \partial y} + 3\eta' \eta^2 \frac{\partial^3 f}{\partial y' \partial y^2} + \eta^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) dx.$$

Esta última expresión simplificada se obtiene de derivar la segunda variación.

Problema 2. Considera el funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx.$$

Deducir la expresión de la segunda variación de $J[y]$.

Solución 2. Como ya hemos visto anteriormente la primera variación para este funcional es:

$$\delta J(\eta, y) = \varepsilon \int_a^b \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx.$$

Así, derivando la primera variación se obtiene que la segunda variación es

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b \left(\eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + 2\eta''\eta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y''} + \eta'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'} + 2\eta'\eta'' \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y''} + \eta''^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y''} \right) dx.$$

Problema 3. Ver si se verifican las condiciones de Legendre y de Jacobi de las siguientes integrales y así determinar si nuestra solución tiene un mínimo local.

1. Sea

$$J[y] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx$$

tal que las condiciones contorno son $y(1) = 1$, $y(2) = 8$.

2. Sea

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(0) = \frac{1}{3}$, $y(1) = \frac{1}{3}e^2$.

Solución 3. 1. La ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

de este apartado es

$$24y - \frac{d}{dx}(2x^2 y') = 0$$

es decir,

$$x^2 y' + x^2 y'' - 12y = 0$$

cuya solución es

$$y(x) = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x^4}.$$

Además, aplicando las condiciones de contorno $y(1) = 1$, $y(2) = 8$, se obtiene

$$y(x) = x^3.$$

Veamos si se cumple la condición de Legendre para así conocer si J tiene un mínimo local en $y(x)$, para ello calculamos $R(x)$ y vemos si es positivo:

$$R(x) = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'}(2y'x^2) = 2x^2 > 0$$

por lo tanto se cumple la condición.

Ahora estudiemos si se verifica la condición de suficiencia de Jacobi.

La ecuación de Jacobi es

$$\frac{d}{dx}(Ru') + (Q' - P)u = 0$$

que en este ejemplo, al ser $P \equiv f_{yy}(x, \hat{y}, \hat{y}') = 24$, $Q \equiv f_{yy'}(x, \hat{y}, \hat{y}') = 0$, $R \equiv f_{y'y'}(x, \hat{y}, \hat{y}') = 2x^2$, la ecuación se transforma en

$$\frac{d}{dx}(2x^2u') - 24u = 0.$$

La solución es

$$u(x) = c_3x^3 + \frac{c_4}{x^4}$$

por lo que suponiendo que c_3 , c_4 son constantes distintas de 0, la condición de suficiencia de Jacobi se verifica.

2. La ecuación de Euler-Lagrange es

$$2y + 2e^x - \frac{d}{dx}(2y') = 0,$$

esta expresión se reescribe como

$$y''(x) - y - e^{2x} = 0.$$

La solución es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

y aplicando las condiciones de contorno se obtiene

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{2x}.$$

La condición de Legendre se cumple ya que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2 > 0.$$

Por último, al tener $P = 2$, $Q' = 0$ y $R = 2$ la ecuación de Jacobi es

$$u''(x) - u = 0,$$

cuya solución es

$$u(x) = ce^x + de^{-x}$$

donde c y d son constantes.

Se cumple que $u(x) \neq 0$ siempre que

$$e^{2x} \neq -\frac{d}{c}.$$

Capítulo 6

El problema isoperimétrico

En esta sección, estudiaremos los problemas isoperimétricos desde el punto de vista del cálculo variacional, también abordaremos la importancia del desarrollo de los multiplicadores de Lagrange para tratar este tipo de problemas y por último veremos uno de los ejemplos más famosos, el Problema de Dido.

6.1. Multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange, que fueron desarrollados por Lagrange para tratar problemas en la mecánica y el cálculo de variaciones, serán fundamentales para calcular los extremos en problemas con restricciones. Sea $f(x, y)$ la función que queremos minimizar sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$ que define implícitamente una curva. Ahora, describimos nuestra posición en esta curva con una sola variable independiente t , es decir,

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)].$$

Una condición necesaria para que $f(x, y)$ tenga un extremo a lo largo de la curva de restricción es

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Además, como $g(x(t), y(t)) = 0$ se tiene

$$\frac{d}{dt}g(x(t), y(t)) = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0. \tag{6.1}$$

No obstante, si $\nabla g \neq 0$ podemos resolver x' o y' de la ecuación (6.1).

Veamos el caso de que $g_y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{(\partial g/\partial x)}{(\partial g/\partial y)} \frac{dx}{dt}$$

por lo que nuestra condición necesaria se reescribe como

$$\frac{dx/dt}{\partial g/\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \right).$$

Como hemos asumido que la curva es regular,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad (6.2)$$

podemos reescribir (6.2) como $\nabla f \times \nabla g = \mathbf{0}$, es decir, ∇f y ∇g son paralelos. Esto implica que

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

por lo que

$$\nabla f - \lambda \nabla g = 0$$

siendo λ una constante.

Por tanto vamos a enunciar el siguiente resultado de los multiplicadores de Lagrange [1]:

Teorema 6.1.1. *Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ diferenciables en un entorno de puntos sobre la curva regular $g(x, y) = 0$ y supongamos que $\nabla g \neq 0$ a lo largo de la curva. Si la función $f(x, y)$ tiene un extremo relativo sobre la curva $g(x, y) = 0$ en el punto (x_0, y_0) , luego existe una constante λ y una función*

$$F(x, y) \equiv f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

y $g(x_0, y_0) = 0$.

6.2. Restricción isoperimétrica

Sea $J : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional de la forma

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx.$$

El problema isoperimétrico consiste en determinar los extremos de J satisfaciendo las condiciones de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ y la restricción isoperimétrica

$$K[y] = \int_a^b g(x, y, y') dx = l.$$

donde l es una constante [1].

Supongamos que J tiene solución y un extremo local $\hat{y}(x)$ verificando las condiciones de contorno y la restricción isoperimétrica. Esta condición isoperimétrica impide que apliquemos los resultados donde η tiene un carácter arbitrario, por lo que para continuar debemos introducir otra función y parámetro obteniendo

$$y(x) = \hat{y}(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x)$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son parámetros pequeños, $\eta_1, \eta_2 \in C^2[a, b]$ y $\eta_1(a) = \eta_2(a) = \eta_1(b) = \eta_2(b) = 0$.

Observemos que gracias a $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ podemos trabajar con funciones en vez de con funcionales

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b g(x, y, y') dx = l.$$

por lo que podemos aplicar multiplicadores de Lagrange.

Así, denotamos $I \equiv J - \lambda K$, $F \equiv f - \lambda g$. Para el funcional I ,

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_i} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon_i} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta_i' \right) dx$$

y aplicando integración por partes se tiene,

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_i} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta_i(x) dx.$$

Además, nuestro supuesto extremo corresponde a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ por lo que la constante λ debe cumplir

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_2} = 0$$

en $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$.

Se sigue que

$$\left[\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y'} \right) \right]_{\hat{y}, \hat{y}'} = 0.$$

Por tanto, los pasos para tratar los problemas isoperimétricos son:

1. Encontrar en la integral

$$\int_a^b [f(x, y, y') - \lambda g(x, y, y')] dx,$$

para la constante λ los extremos de la forma $y = y(x, \lambda, c_1, c_2)$ donde c_1 y c_2 son constantes.

2. Tomar λ, c_1 y c_2 tales que los extremos satisfagan las condiciones de contorno $y(a) = y_a, y(b) = y_b$ y el extremo dé a K el valor de I .

6.3. El problema de Dido

Dido o Elisa de Tiro es la fundadora y primera reina de Cartago, en el actual Túnez. La leyenda cuenta que llegó a un acuerdo con un jefe local del norte de África para comprar tanta tierra como un cuero de buey pudiera abarcar. Por lo que seleccionó un buey y cortó su piel en tiras muy finas, que unió para formar un hilo de cuero de más de dos millas y media de largo. Luego, Dido usó el hilo de piel de buey y la costa del mar del norte de África para definir el perímetro de su propiedad consiguiendo que fuera el mayor territorio posible. El problema que Dido consistía en determinar el camino óptimo a lo largo del cual colocar el hilo de cuero de buey para proporcionar la mayor cantidad de tierra, es decir, implicaba determinar la curva α de longitud fija (el hilo) de modo que el área encerrada por α y una curva dada σ (la costa del norte de África) sea máxima. Desde el punto de vista variacional [1], el problema de Dido consiste en maximizar el área

$$J[y] = \int_{-a}^a y dx$$

sujeto a las condiciones de contorno $y(-a) = 0$, $y(a) = 0$ y a la restricción

$$K[y] = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Para hallar la solución utilizamos los multiplicadores de Lagrange,

$$J - \lambda K = \int_{-a}^a y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Así, la ecuación de Euler-Lagrange para este problema es

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

e integrando se sigue

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -(x - c_1).$$

Al despejar dy se obtiene

$$dy = \pm \frac{x - c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}} dx \tag{6.3}$$

e integrando (6.3) se tiene

$$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2.$$

Además, esta última ecuación se reescribe como

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2,$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro (c_1, c_2) y radio λ . Las condiciones contorno $y(-a) = y(a) = 0$ implican que

$$(-a + c_2)^2 + (-c_1)^2 = \lambda^2$$

y

$$(a + c_2)^2 + (-c_1)^2 = \lambda^2$$

por lo que $c_2 = 0$.

Para calcular c_1 y λ estudiamos geoméricamente el problema. Así, aplicando las relaciones trigonométricas en la figura (6.1), se obtiene

$$\lambda \operatorname{sen} \theta = 1, \quad \lambda \theta = \frac{l}{2}.$$

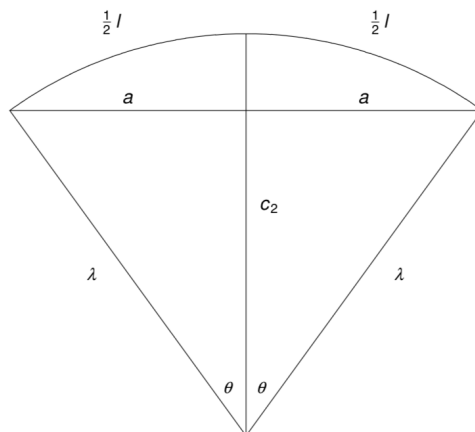


Figura 6.1: El problema geométrico.

Ahora, despejando λ e igualando ambas ecuaciones se tiene

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{l} \theta. \tag{6.4}$$

La ecuación (6.4) es trascendental por lo que se resolverá gráficamente tal como vemos en la siguiente figura:

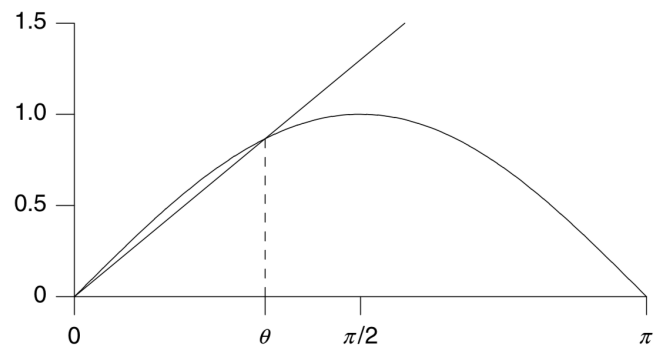


Figura 6.2: Solución gráfica.

Por lo tanto,

$$\lambda = a \csc \theta, \quad c_2 = a \cot \theta.$$

Bibliografía

- [1] Mark Kot, *A first course in the calculus of variations*. American Mathematical Society, 2004.
- [2] Filip Rindler, *The calculus of variations*. Universitext. Springer, 2018.
- [3] Lev D. Elsgolc, *Calculus of Variations*. Dover Books on Mathematics, 2007.
- [4] Bernard Dacorogna, *Introduction to the calculus of variations*. Imperial College Press Distributed by World Scientific, 2004.
- [5] Bruce Van Brunt, *The calculus of variations*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [6] Paolo Freguglia, Mariano Giaquinta, *The Early Period of the Calculus of Variations*. Birkhäuser, 2016.
- [7] Bernoulli, Johann (1697b). *Principia Calculi exponentialium seu percurrentium*. Acta Eruditorum, 1697.
- [8] Hisham Abou-Kandil, Gerhard Freiling, Vlad Ionescu, Gerhard Jank, *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*. Springer Basel AG, 2003.
- [9] Hansjörg Kielhöfer, *Calculus of Variations. An Introduction to the One-Dimensional Theory with Examples and Exercises*. Springer, 2018.