



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Modelización matemática de
distintos modelos 1D de vigas.
Cálculo analítico y numérico de las
soluciones

Miguel Carmona Rodríguez

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Modelización matemática de
distintos modelos 1D de vigas.
Cálculo analítico y numérico de las
soluciones

Miguel Carmona Rodríguez

Febrero/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Matemática Aplicada
Título: Modelización matemática de distintos modelos 1D de vigas. Cálculo analítico y numérico de las soluciones
Breve descripción do contido
Primero se postulan los modelos 1D que rigen el comportamiento de las vigas para luego encontrar una solución general de los mismos. El principal objetivo es, a partir de esta solución general y considerando distintas condiciones de contorno, llegar a las soluciones particulares de cada caso. Se realizará también un estudio numérico seguido de una comparación de los resultados obtenidos numérica y analíticamente.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen	VIII
Introducción	IX
0.1. Introducción	IX
0.2. Objetivos	X
0.3. Contenido	X
0.4. Introducción de conceptos	XI
0.4.1. Tensiones	XI
0.4.2. Deformación	XI
0.4.3. Equilibrio	XII
1. Modelo de viga sometida a extensión pura	1
1.1. El modelo de viga sometida a extensión pura.	2
1.2. Solución general del modelo 1D: viga sometida a extensión pura	4
1.2.1. Solución particular viga modelo MOD1	4
1.2.2. Solución particular viga modelo MOD2	7
1.3. Identificación con benchmark	11
1.4. Resolución numérica del modelo de extensión pura	13
1.4.1. Resolución numérica MOD1	13
1.4.2. Resolución numérica MOD2	17
2. El modelo de viga sometida a flexión pura: Teoría de Euler-Bernoulli	21
2.1. Solución general del modelo 1D: viga sometida a flexión pura Teoría de Euler-Bernoulli	24
2.2. Solución particular viga modelo MOD21	27
2.3. Solución particular viga modelo MOD22	30
2.4. Identificación con benchmark	33
2.5. Resolución numérica: Modelo Euler-Bernoulli	38

2.5.1. Resolución numérica MOD21	38
2.5.2. Resolución numérica MOD22	41
3. Modelo de viga sometida a flexión pura: Teoría de Timoshenko	47
3.1. El modelo de viga sometida a flexión pura: Teoría de Timoshenko	47
3.2. Solución general: Modelo de Timoshenko	49
3.3. Solución particular MOD31	53
3.4. Identificación con benchmark	57
3.5. Resolución numérica para problema de flexión pura Teoría de Timoshenko .	59
Bibliografía	65
.1. Programas matlab	66
.1.1. Modelo de flexión pura	66
.1.2. Modelo de flexión pura Teoría de Euler-Bernoulli	73
.1.3. Modelo de flexión pura Teoría de Timoshenko	78

Resumen

En el presente trabajo de fin de grado se trata de calcular las soluciones generales de los distintos modelos 1D que gobiernan el comportamiento de una viga cuando está sometida a flexión o a extensión. A partir de estas expresiones, se consideran diferentes condiciones de contorno que dan lugar a distintas soluciones particulares. Además, el trabajo recoge algún ejemplo práctico de los casos anteriormente resueltos. Por último, se realiza un estudio numérico, utilizando el método de diferencias finitas, donde se comparan las soluciones obtenidas en los ejemplos de la resolución analítica con las calculadas numéricamente.

Abstract

In the present end of degree project, it is a question of calculating the general solutions of the different 1D models that govern the behavior of a beam when it is subjected to flexion or extension. From these expressions, different boundary conditions that give rise to different particular solutions are considered. In addition, the work gathers some practical example of the cases previously resolved. Finally, a numerical study is carried out, using the finite differences method, where the solutions obtained in the examples of the analytical resolution are compared with those calculated numerically.

Introducción

0.1. Introducción

Cuando se trata de construir cualquier tipo de estructura las vigas son un pilar fundamental y de ellas depende el adecuado soporte de la estructura. Es por ello que, para garantizar una buena condición de resistencia, es necesario un análisis exhaustivo del comportamiento de la viga en respuesta al trabajo que ésta debe realizar. Las vigas están presentes en la construcción de edificios, puentes, alas de avión, etc ([1], [2]).

Las vigas están pensadas para para trabajar a tracción, compresión, flexión, torsión, pandeo, etc. En este trabajo se estudia, por separado, el comportamiento de las vigas cuando trabajan a extensión y a flexión. En cualquiera de los dos casos, el comportamiento de la viga está gobernado por una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Desde la antigüedad, se ha realizado la construcción de todo tipo de estructuras sin la realización de un estudio previo. Esto puede acarrear serios problemas como provocar grietas, o incluso la fractura de la estructura llegando a ser peligroso para la seguridad de las personas.

Es de gran importancia el estudio de las estructuras tipo viga en ingeniería y en física. Los primeros estudios vinieron a manos de Leonhard Euler y Daniel Bernoulli al proponer la primera teoría de una viga sometida a flexión pura en el siglo XVIII. Más tarde, en el siglo XX, Stephen Timoshenko propone una ampliación de la teoría Euler-Bernoulli al añadir el efecto de deformación de corte. Esta nueva consideración, hace que la teoría sea mas acertada en cuanto la viga posea un aspecto más robusto. Podemos consultar uno de los primeros estudios sobre la viga de Timoshenko en [3].

En este trabajo, se realiza un estudio sobre el comportamiento de vigas sometidas a extensión pura y a flexión pura considerando las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko. En primer lugar, se resuelven las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de las vigas. En segundo lugar, se realiza un estudio numérico con la simulación de los resultados para comparar con los obtenidos en el primer estudio y ver que están en consonancia.

0.2. Objetivos

Los objetivos de este trabajo son los siguientes:

- Planteamiento de los modelos matemáticos 1D más generales que rigen el comportamiento de una viga cuando está sometida a extensión pura o a flexión pura. En el caso de una viga sometida a flexión pura, se consideran la teoría de Euler-Bernoulli y la de Timoshenko.
- Resolución teórica de los modelos matemáticos considerados.
- Resolución analítica de casos particulares, que surgen de añadir condiciones de contorno sobre los casos más generales.
- Aplicación de nuestros resultados a los ejemplos recogidos en la bibliografía que son reconocidos como casos 'benchmark', con el objetivo de llegar a las mismas soluciones y así, dar veracidad a nuestro estudio previo.
- Resolución numérica por medio de diferencias finitas de los casos particulares considerados. Para cada caso, construcción de un programa en matlab que implemente el método propuesto.
- Comparación entre la solución numérica y la solución analítica calculadas. Evaluar el error cometido con respecto a la solución analítica calculada.

0.3. Contenido

Este trabajo consta de tres capítulos, uno para cada uno de los modelos considerados: modelo de extensión pura, modelo de flexión pura (Teoría de Euler Bernoulli) y modelo de flexión pura (Teoría de Timoshenko). Los tres capítulos tienen la misma estructura.

Cada capítulo comienza con un pequeño apartado donde se formula el modelo correspondiente. Partiendo de las hipótesis convenientes, se trata de dar una breve descripción del procedimiento a seguir para llegar a la expresión final del modelo. Si buscamos una descripción más detallada del mismo, ésta está recogida en la bibliografía.

En el segundo apartado, se trata de dar con una solución general para las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la viga según el modelo correspondiente. Dicha solución vendrá dada en función de constantes de integración que dependerán, en cada caso, de las condiciones de contorno establecidas. Éste apartado termina con una tabla donde que recoge las posibles condiciones de contorno que describen cada uno de los casos particulares que se van a estudiar a lo largo del capítulo.

En los apartados posteriores se busca llegar a una solución de los casos particulares que se han considerado y, en caso de que exista solución, enseñar con un ejemplo la resolución de un caso práctico en las condiciones requeridas.

El siguiente apartado recoge la identificación con un caso *benchmark* de los recogidos en la biografía. En él se comparan las soluciones obtenidas aplicando nuestros resultados a los datos del ejemplo, con las recogidas en la literatura.

Por último, la resolución numérica de los casos particulares considerados. Ésta resolución pasa por la discretización del problema correspondiente utilizando diferencias finitas y su posterior implementación mediante el programa MATLAB. El objetivo de este apartado es comparar las soluciones analíticas obtenidas a lo largo del capítulo con las soluciones aproximadas que nos proporcionan los métodos numéricos.

En el apéndice se recogen los ficheros programados con MATLAB utilizados tanto para la implementación de los métodos numéricos desarrollados, como para las representaciones gráficas que se encuentran a lo largo del trabajo.

0.4. Introducción de conceptos

0.4.1. Tensiones

Se supone una viga en equilibrio bajo la acción de fuerzas exteriores. En respuesta, se producirán fuerzas interiores que actuarán entre las distintas partes de la viga, las llamadas tensiones. Podemos descomponer la tensión en un punto x_0 de la viga en su componente normal, perpendicular a la sección transversal que contiene a x_0 , y sus componentes tangenciales o cortantes [4]. Toda la información del estado de tensiones en el punto x_0 se recoge en el denominado tensor de Cauchy.

0.4.2. Deformación

Se considera la viga como cuerpo elástico lo que implica que no es posible un desplazamiento de las partículas de la viga sin una deformación de la misma. El pequeño desplazamiento de las partículas de la viga deformada se descompone en sus componentes u_1, u_2, u_3 paralelas a los ejes x_1, x_2, x_3 , respectivamente. Se supone que estas componentes son muy pequeñas y que varían con continuidad en todo el volumen de la viga [4]. Las deformaciones son los desplazamientos relativos que ocurren entre dos puntos infinitamente próximos.

0.4.3. Equilibrio

Para postular los modelos que rigen el comportamiento de una viga, se supone que la viga en cuestión está en equilibrio. Esto se traduce a que verifica que la suma de fuerzas que actúan sobre ella es nula y que la suma de momentos respecto a un punto cualquiera también lo es.

Capítulo 1

Modelo de viga sometida a extensión pura

Este trabajo constituye un estudio sobre las estructuras tipo viga. Las vigas son elementos en 3D, por lo tanto los modelos que describen su comportamiento también están definidos en un espacio en 3D. Sin embargo, hay ciertas características de las propias vigas que nos permiten considerarlas como elementos 1D, facilitándonos su estudio. Consideraremos que la viga a estudiar posee una dimensión considerablemente más grande que las otras dos. Característica que nos permite realizar dicha simplificación dimensional. Por lo general, la longitud de la viga L será claramente mayor que el área de su sección A . La notación y los modelos de los que se parte, así como su deducción, podemos encontrarlos en las notas del curso [5]

Como sistema de referencia, utilizaremos un sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) orientado positivamente. La longitud de la viga se dispondrá a lo largo del eje x_3 desde el punto $x_3 = 0$ al punto $x_3 = L$ y cuya sección, perpendicular al eje longitudinal de la viga, viene determinada por un dominio plano, ω , en el plano x_1x_2 . La carga total de la viga por unidad de longitud, \vec{q} , vendrá dada por:

$$\vec{q}(x_3) = \int_{\omega} \vec{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_{N(x_3)}} \vec{g}(x_1, x_2, x_3) d\Gamma,$$

donde $\vec{f}(x_1, x_2, x_3)$ denota la densidad de fuerzas de volumen a la que esta sometida la viga, y $\vec{g}(x_1, x_2, x_3)$ la densidad de fuerza de superficie sobre una parte Γ_N de su frontera lateral. En particular, $\Gamma_{N(x_3)}$ hace referencia a la sección de Γ_N correspondiente a la coordenada x_3 .

1.1. El modelo de viga sometida a extensión pura.

Para una barra sometida a extensión pura supondremos que las componentes primera y segunda de la carga total por unidad de longitud son nulas, es decir, vendrá dada únicamente por su componente axial:

$$\vec{q} = (0, 0, q_3(x_3)). \quad (1.1)$$

Para cada $x_3 \in (0, L)$ supondremos que la sección transversal ω correspondiente a dicho punto permanece plana después de la deformación y que el campo de desplazamientos es de la forma:

$$\vec{u} = (0, 0, u_3(x_3)). \quad (1.2)$$

Sean σ el tensor de tensiones de Cauchy, \vec{n} el vector unitario y normal a cada sección perpendicular al eje de la viga y orientado en el sentido creciente de x_3 . En virtud del teorema de Cauchy, el vector de esfuerzos que realiza la parte derecha de la viga en x_3 sobre la parte izquierda vendrá dado por:

$$\sigma \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Como estamos considerando fuerzas aplicadas de extensión pura, únicamente tendremos componente normal del vector de esfuerzos sobre cada sección transversal. Es decir, será de la forma:

$$\sigma \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Así, bajo las hipótesis consideradas, las dos primeras componentes carecen de interés para nuestro problema. Por tanto, para nuestro modelo únicamente tendremos en cuenta la tercera componente del vector de esfuerzos, que resulta ser la componente axial.

Podemos escribir la deformación en la dirección axial en términos del desplazamiento:

$$\varepsilon_{33} = \frac{du_3(x_3)}{dx_3}. \quad (1.5)$$

A su vez, la deformación se relaciona con la tensión mediante la ley de Hooke, que podemos consultar en [6]. De esta forma, considerando un tensor de tensiones con única componente no nula la σ_{33} :

$$\varepsilon_{33} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} = \frac{1}{E} \sigma_{33}, \quad (1.6)$$

donde E denota el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson del material que constituye la viga. El esfuerzo normal total que realiza la parte derecha de la viga sobre su parte izquierda en cada sección $x_3 = cte$ se obtiene al integrar la ecuación (1.6) sobre toda la sección. De esta forma, teniendo en cuenta la relación (1.5) tenemos:

$$A\sigma_{33} = AE \frac{du_3}{dx_3}. \quad (1.7)$$

Para que se satisfagan las ecuaciones de equilibrio, que podemos consultar en [7], se debe verificar:

$$-E \frac{d}{dx_3} \left(\frac{du_3(x_3)}{dx_3} \right) = \frac{q_3}{A}. \quad (1.8)$$

Esta ecuación modela el comportamiento de la viga sometida a fuerzas exclusivamente de tensión. Sin embargo, éste resulta incompleto sino consideramos condiciones de contorno. Para poder resolver la ecuación (1.8) existen varias condiciones de borde posibles. Nosotros únicamente consideraremos los dos casos siguientes:

Modelo	Condición en $x_3 = 0$	Condición en $x_3 = L$	Fórmula Matemática
MOD1	Dirichlet	Borde con carga $P\vec{e}_3$	$u_3(0) = 0$ y $EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = P$
MOD2	Borde con carga $-P\vec{e}_3$	Borde con carga $P\vec{e}_3$	$EA \frac{du_3(0)}{dx_3} = P$ y $EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = P$

Cuadro 1.1: Casos particulares de extensión pura.

El primero de los casos se identifica con un desplazamiento nulo en la coordenada $x_3 = 0$ y un esfuerzo normal de magnitud P en la coordenada $x_3 = L$, mientras que el segundo se corresponde a un esfuerzo normal de magnitud P en ambos extremos de la viga.

En el capítulo siguiente se encontrará solución para el caso general y, a partir de ésta, las soluciones para los casos recogidos en el cuadro 1.1. Además, se tratará de buscar soluciones de casos concretos recogidos en la literatura con el fin de identificar los resultados obtenidos a partir de nuestra solución general con los que figuran en la misma. En el tercer capítulo se resuelve de forma numérica los mismos ejemplos con el objetivo de llegar a soluciones muy cercanas a las que se calcularon de forma analítica en el segundo capítulo.

1.2. Solución general del modelo 1D: viga sometida a extensión pura

Acabamos de ver que en el caso de una viga sometida a extensión pura el problema resultante pasa por encontrar el desplazamiento u_3 que es solución de la ecuación diferencial:

$$-E \frac{d}{dx_3} \left(\frac{du_3(x_3)}{dx_3} \right) = \frac{q_3}{A}, \quad (1.9)$$

siendo E el módulo de Young, A el área de la sección de la viga, y q_3 la fuerza axial por unidad de longitud aplicada. Para hallar la tensión implicada bastará tener en cuenta que:

$$\sigma_{33} = E \frac{du_3}{dx_3}, \quad (1.10)$$

expresión que resulta de las ecuaciones (1.5) y (1.6). Teniendo en cuenta que $q_3 = q_3(x_3)$, para encontrar la solución general de (1.9) bastará con integrar dos veces a ambos lados de la expresión. Por lo tanto:

$$\int \left(\int -E \frac{d}{dx_3} \left(\frac{du_3(x_3)}{dx_3} \right) dx_3 \right) dx_3 = \int \left(\int \frac{q_3(x_3)}{A} dx_3 \right) dx_3.$$

Se deduce entonces:

$$\int \frac{du_3(x_3)}{dx_3} dx_3 = -\frac{1}{EA} \int \left(\int q_3(x_3) dx_3 \right) dx_3 + C_1,$$

y, por tanto:

$$u_3(x_3) = -\frac{1}{EA} \int \left(\int q_3(x_3) dx_3 \right) dx_3 + C_1 x_3 + C_2, \quad (1.11)$$

con $C_i, i = 1, 2$ constantes de integración reales. Ahora de (1.10) deducimos que la tensión viene dada por:

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{A} \int q_3(x_3) dx_3 + C_1. \quad (1.12)$$

1.2.1. Solución particular viga modelo MOD1

Estudiemos ahora el caso particular de un desplazamiento nulo en la coordenada $x_3 = 0$ y un esfuerzo normal de magnitud P en la coordenada $x_3 = L$, es decir, tenemos las siguientes condiciones de contorno (ver Cuadro 1.1, modelo MOD1):

$$u_3(0) = 0, \quad (1.13)$$

$$EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = P. \quad (1.14)$$

1.2. SOLUCIÓN GENERAL DEL MODELO 1D: VIGA SOMETIDA A EXTENSIÓN PURA 5

De ahora en adelante denotaremos por $m(x_3)$ a la integral doble de la carga por unidad de longitud (q_3):

$$m(x_3) = \int \left(\int q_3(x_3) dx_3 \right) dx_3. \quad (1.15)$$

La función m está definida salvo un polinomio de grado 1 en x_3 . Así, sus constantes de integración se incluyen en la expresión de la solución (1.11) que se reescribe de la siguiente manera:

$$u_3(x_3) = \frac{-1}{EA} m(x_3) + C_1 x_3 + C_2. \quad (1.16)$$

Evaluando en $x_3 = 0$ la ecuación (1.16), e igualando a 0 como nos dicta la condición de contorno (1.13), tenemos:

$$u_3(0) = \frac{-1}{EA} m(0) + C_2 = 0.$$

Por tanto,

$$C_2 = \frac{m(0)}{EA}.$$

Considerando la expresión resultante de derivar (1.16), y posteriormente evaluar en $x_3 = L$, por la condición de contorno (1.14) se deduce:

$$EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = EA \left(\frac{-1}{EA} m'(L) + C_1 \right) = P,$$

y, en consecuencia:

$$C_1 = \frac{P + m'(L)}{EA}.$$

Así, la solución para el modelo de extensión pura MOD1 es:

$$u_3(x_3) = \frac{-1}{EA} m(x_3) + \frac{P + m'(L)}{EA} x_3 + \frac{m(0)}{EA} \quad (1.17)$$

$$\sigma_{33} = \frac{-1}{A} m'(x_3) + \frac{P + m'(L)}{A} \quad (1.18)$$

Ejemplo 1.1. Consideraremos el caso sencillo de una viga de madera de longitud 10 metros con sección circular de radio 0.25 metros. El módulo de Young y la densidad de la madera valen $7 \cdot 10^9 N/m^2$ y $800 kg/m^3$ respectivamente. Existe una carga de $P = 0N$ en $x_3 = L$. Supondremos que la viga está sometida únicamente a la fuerza de la gravedad actuando en la dirección $-\vec{e}_3$. Por tanto, en cada sección $x_3 = cte$:

$$\int_{\omega} \vec{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 = \int_{\omega} -\rho g \vec{e}_3 dx_1 dx_2 = -\rho g A \vec{e}_3 \quad N/m,$$

$$\int_{\Gamma_{N(x_3)}} \vec{g}(x_1, x_2, x_3) d\Gamma = \vec{0} \quad N/m,$$

siendo ρ la densidad de masa del material por el que está constituida la viga y g la constante de gravitación terrestre, la cual tiene un valor aproximado de $9,8 \text{ m/s}^2$. Bajo estas condiciones, la carga por unidad de longitud está determinada por:

$$\vec{q}(x_3) = \int_{\omega} -\rho g \vec{e}_3 dx_1 dx_2 = -A \rho g \vec{e}_3 = -\frac{\pi}{16} \rho g \vec{e}_3 \quad N/m. \quad (1.19)$$

Y la integral doble de su tercera componente, anteriormente denotada por m , será:

$$m(x_3) = \int \left(\int q_3(x_3) dx_3 \right) dx_3 = -\frac{1}{16} \int \left(\int \pi \rho g dx_3 \right) dx_3 = \frac{-\rho g \pi x_3^2}{32}, \quad (1.20)$$

la cual verifica:

$$m(0) = 0 \quad y \quad m'(L) = -\frac{\rho g \pi L}{16}.$$

Sustituyendo estos valores y la expresión (1.20) en la solución general (1.17), obtenemos el desplazamiento de la viga:

$$u_3(x_3) = \frac{-1}{EA} m(x_3) + \frac{P + m'(L)}{EA} x_3 + \frac{m(0)}{EA} \quad (1.21)$$

$$= \frac{\rho g \pi}{32EA} x_3^2 + \frac{P - \rho g \pi L/16}{EA} x_3 \quad (1.22)$$

$$= 5,6 \cdot 10^{-7} x_3^2 - 1,12 \cdot 10^{-5} x_3 \quad m, \quad (1.23)$$

y la respectiva tensión:

$$\sigma_{33} = \frac{-1}{A} m'(x_3) + \frac{P + m'(L)}{A} \quad (1.24)$$

$$= \frac{\rho g \pi}{16A} x_3 + \frac{P - \rho g \pi L/16}{A} \quad (1.25)$$

$$= 7840 x_3 - 78400 \quad N/m^2. \quad (1.26)$$

En la Figura 1.1 se representan el desplazamiento axial y la tensión a la que está sometida la viga. Tenemos un desplazamiento insignificante, de hecho no somos capaces de apreciarlo a simple vista por estar las dos longitudes de la viga (en reposo y bajo hipótesis) superpuestas en la primera de las gráficas.

En la segunda de las gráficas se representa la tensión σ_{33} frente a la coordenada x_3 . Así vemos la evolución de la tensión a lo largo de toda la viga, yendo de -78400 N/m^2 en el extremo izquierdo hasta ser completamente nula en el extremo derecho.

¹Nótese que no se han considerado constantes de integración, esto se debe a que dichas constantes son las propias C_i que ya fueron calculadas para el caso general

1.2. SOLUCIÓN GENERAL DEL MODELO 1D: VIGA SOMETIDA A EXTENSIÓN PURA 7

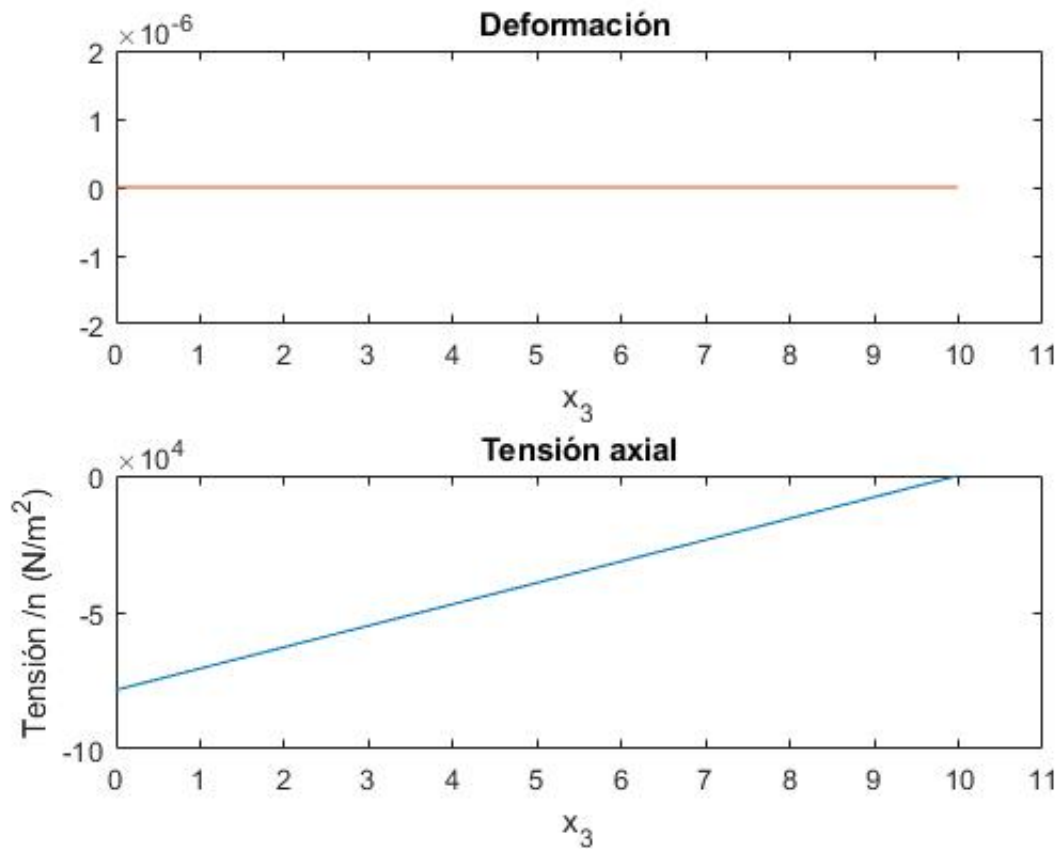


Figura 1.1: Ejemplo 2.1

1.2.2. Solución particular viga modelo MOD2

Ahora consideraremos el caso de un esfuerzo normal de magnitud P en ambos extremos de la viga, el cual se identifica con las siguientes condiciones de contorno (ver cuadro 1.1, modelo MOD2): :

$$EA \frac{du_3(0)}{dx_3} = P, \quad (1.27)$$

$$EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = P. \quad (1.28)$$

Vemos que no se verifica la condición suficiente de existencia de solución que aparece en el Teorema 130 de [5]. Aun así, como no es necesaria, trataremos de calcularla. Por un lado, partiendo de (1.16) y utilizando (1.27) llegamos a:

$$EA \frac{du_3(0)}{dx_3} = EA \left(\frac{-1}{EA} m'(0) + C_1 \right) = P,$$

de donde se deduce:

$$C_1 = \frac{1}{EA} (P + m'(0)). \quad (1.29)$$

Por otro lado, usando de nuevo la expresión general (1.16) y utilizando la condición de contorno (1.28) llegamos a:

$$EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = EA \left(\frac{-1}{EA} m'(L) + C_1 \right) = P,$$

$$C_1 = \frac{1}{EA} (P + m'(L)). \quad (1.30)$$

De las igualdades (1.29) y (1.30) es inmediato deducir que la función m debe definirse de modo que verifique:

$$m'(0) = m'(L). \quad (1.31)$$

Veremos más abajo que esta restricción sobre m' obliga a que la carga por unidad de longitud verifique ciertas restricciones. Por consiguiente:

$$u_3(x_3) = \frac{-1}{EA} m(x_3) + \frac{1}{EA} (P + m'(L)) x_3 + C_2, \quad (1.32)$$

$$\sigma_{33} = \frac{-1}{A} m'(x_3) + \frac{P + m'(L)}{A}. \quad (1.33)$$

Para este caso particular, con estas condiciones de contorno si existe solución, no es única sino que tendría infinitas soluciones (una para cada valor de $C_2 \in \mathbb{R}$) correspondientes a posibles traslaciones que puede experimentar la viga.

Para encontrar una solución única de este caso es necesario añadir alguna otra condición a mayores de las ya consideradas. Trataremos de ilustrarlo en el ejemplo siguiente.

Observación:

No siempre se verifica que m' tiene el mismo valor en los dos extremos de la viga por lo que este problema no siempre tiene solución.

Tomemos como primer ejemplo el caso que se consideró para el Ejemplo 2.1., esta vez con las condiciones de contorno (1.27) y (1.28).

Vimos que la función m de una viga de madera de longitud 10 metros con sección circular de radio 0,25 metros sometida únicamente a la fuerza de la gravedad en la dirección $-\vec{e}_3$ viene dada por:

$$m(x_3) = -\frac{\rho g \pi}{32} x_3^2,$$

cuya función derivada es:

$$m'(x_3) = -\frac{\rho g \pi}{16} x_3.$$

1.2. SOLUCIÓN GENERAL DEL MODELO 1D: VIGA SOMETIDA A EXTENSIÓN PURA 9

Con unos simples cálculos vemos que:

$$m'(0) = 0,$$
$$m'(L) = -\frac{\rho g \pi L}{16} = 15386.$$

Por lo tanto:

$$m'(0) \neq m'(L)$$

lo que implica que estamos en un caso sin solución. Obsérvese que la carga $q_3(x_3)$ no es antisimétrica respecto a $x_3 = L/2$, condición necesaria de existencia de solución.

Caso particular MOD2: fijar traslaciones

Ya vimos que no nos es posible obtener una solución única para el modelo de extensión pura MOD2 (suponiendo que exista) tal y como está planteado. Para fijar una solución y evitar traslaciones, vamos a considerar que la viga en su posición central, la correspondiente a $x_3 = L/2$, está sujeta y, por tanto, el desplazamiento es nulo en dicho punto. Es decir:

$$u_3(L/2) = 0. \quad (1.34)$$

Basándonos en esta condición somos capaces de despejar el valor de C_2 . En concreto, sin más que evaluar la ecuación (1.32) en $L/2$ e igualando a cero como se muestra a continuación:

$$u_3(L/2) = \frac{-1}{EA} m(L/2) + \frac{(P + m'(0)) L}{EA} \frac{L}{2} + C_2 = 0, \quad (1.35)$$

y, por tanto:

$$C_2 = \frac{1}{EA} \left(m(L/2) - \frac{L}{2} (P + m'(0)) \right). \quad (1.36)$$

Si sustituímos este valor en la expresión (1.32) tenemos como resultado el desplazamiento axial de la viga:

$$u_3(x_3) = \frac{-1}{EA} m(x_3) + \frac{1}{EA} (P + m'(L)) x_3 + \frac{1}{EA} \left(m(L/2) - \frac{L}{2} (P + m'(0)) \right). \quad (1.37)$$

Su correspondiente tensión es:

$$\sigma_{33} = \frac{-1}{A} m'(x_3) + \frac{1}{A} (P + m'(L)) \quad (1.38)$$

Ahora ilustraremos con un ejemplo práctico la resolución de un modelo de extensión pura MOD2.

Ejemplo 1.2. Seguiremos con el mismo ejemplo de una viga de madera de longitud 10 metros y con sección circular de radio 0.25 metros. Supongamos que la viga está sometida a un esfuerzo de 100 N en $x_3 = 0$ y en $x_3 = L$ en las direcciones $-\vec{e}_3$ y \vec{e}_3 respectivamente. Suponemos además que el desplazamiento de la viga es nulo en su posición central. Recordamos que el módulo de Young de la madera E tiene un valor de $7 \cdot 10^9 N/m^2$.

Ya vimos que para obtener solución es necesario que se verifique:

$$m'(0) = m'(L). \quad (1.39)$$

Ya que m depende de la carga total por unidad de longitud, el hecho de que se verifique (1.39) depende únicamente de q . Por tanto, ahora vamos a considerar que la viga está sometida a la carga por unidad de longitud definida por:

$$\vec{q} = (0, 0, 2x_3 - L). \quad (1.40)$$

La función m asociada que consideraremos es:

$$m(x_3) = \int \left(\int q_3(x_3) dx_3 \right) dx_3 = \frac{x_3^3}{3} - \frac{L}{2} x_3^2.$$

Veamos que se verifica (1.39). Derivamos m :

$$m'(x_3) = x_3^2 - Lx_3.$$

Si evaluamos m' en los extremos de la viga:

$$m'(0) = m'(L) = 0.$$

vemos que efectivamente estamos en condiciones de existencia de solución.

Sustituyendo en (1.37) los valores del módulo de Young E , la longitud de la viga L , el área de la sección A , el esfuerzo P y $m(L/2)$ obtenemos la solución que buscábamos.

$$\begin{aligned} u_3(x_3) &= \frac{-1}{EA} m(x_3) + \frac{1}{EA} (P + m'(L)) x_3 + \frac{1}{EA} \left(m(L/2) - \frac{L}{2} (P + m'(0)) \right) \\ &= \frac{-1}{EA} \left(\frac{x_3^3}{3} - \frac{L}{2} x_3^2 \right) + \frac{P}{EA} x_3 + \frac{1}{EA} \left(-\frac{L^3}{12} - \frac{PL}{2} \right) \\ &= -2,4 \cdot 10^{-10} x_3^3 + 3,64 \cdot 10^{-9} x_3^2 + 7,3 \cdot 10^{-8} x_3 - 4,24 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Y su correspondiente tensión es:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{-1}{A} m'(x_3) + \frac{1}{A} (P + m'(L)) \\ &= -\frac{x_3^2 - Lx_3}{A} + \frac{P}{A} \\ &= -5,093x_3^2 + 50,93x_3 + 509,3 \quad N/m^2 \end{aligned}$$

En la Figura 1.2 se representa con una gráfica el desplazamiento axial y la tensión a la que está sometida la viga. De nuevo tenemos un desplazamiento muy pequeño igual que en el ejemplo 2.1.

En este caso vemos que la tensión toma una forma de parábola, siendo ésta máxima en el punto medio de la viga y mínima en los extremos de la misma.

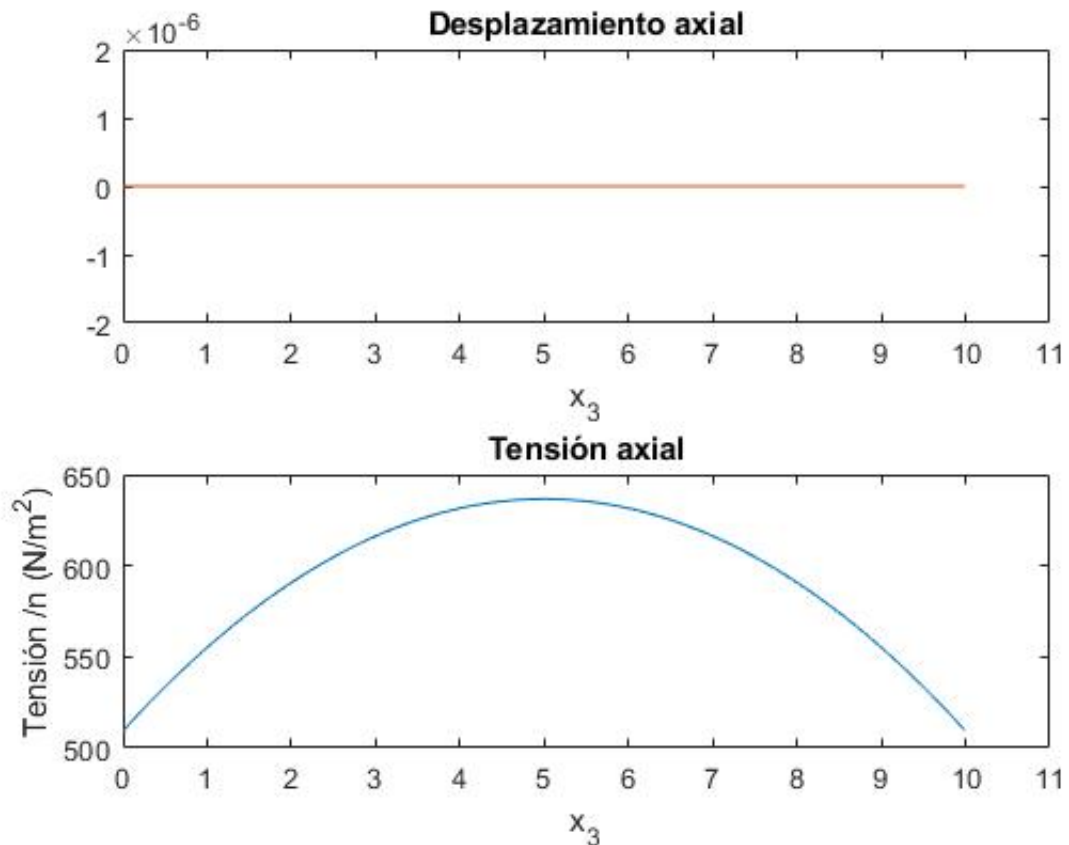


Figura 1.2: Ejemplo 1.2

1.3. Identificación con benchmark

En este apartado trataremos de verificar que los resultados obtenidos en el capítulo anterior están en consonancia con las respuestas conocidas en ingeniería para este tipo de problemas. Para ello compararemos las soluciones analíticas calculadas con las recogidas en la literatura clásica para problemas de extensión pura. Estos resultados, con los que trataremos de identificar nuestras soluciones, son los denominados casos 'benchmark' ya

que han sido contrastados por autores muy diversos. En este caso, nuestro *benchmark* será el recogido en [7], en el cual se considera una viga con condiciones Dirichlet y borde carga $P\vec{e}_3$ en cada uno de sus extremos.

Recordamos la solución obtenida en el capítulo anterior:

$$u_3(x_3) = \frac{1}{-EA} \int \left(\int q_3(x_3) dx_3 \right) dx_3 + C_1 x_3 + C_2, \quad (1.41)$$

solución que está determinada por la integral doble de la carga en la dirección axial.

La solución que propone Sokolnikoff para el desplazamiento axial de una viga con condiciones Dirichlet y borde con carga $P\vec{e}_3$, cuando la carga por unidad de longitud es nula en toda la viga es:

$$u_3(x_3) = \frac{p}{E} x_3, \quad (1.42)$$

siendo $p = P/A$ una constante que indica la carga por unidad de superficie que experimenta la viga en el extremo de la misma. Partiremos de la solución que calculamos anteriormente y consideraremos las mismas condiciones que Sokolnikoff.

Éstas condiciones son las que definen el modelo MOD1, que recordemos tiene las siguientes condiciones de contorno:

$$u_3(0) = 0, \quad (1.43)$$

$$EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = P, \quad (1.44)$$

y solución:

$$u_3(x_3) = \frac{-1}{EA} m(x_3) + \frac{P + m'(L)}{EA} x_3 + \frac{m(0)}{EA} \quad (1.45)$$

Además, consideramos que $q_3 = 0$ para $\forall x_3 \in [0, L]$. Teniendo en cuenta cómo está definida la función m , (1.15), al hacer dicha suposición la ecuación (1.45) pasa a ser de la forma:

$$u_3(x_3) = \frac{P}{EA} x_3. \quad (1.46)$$

Si consideramos que el esfuerzo en la sección correspondiente a la coordenada $x_3 = L$ está uniformemente distribuido, es decir:

$$\sigma_{33} = \frac{P}{A} = p(cte), \quad (1.47)$$

entonces al sustituir el cociente P/A por la constante p en la ecuación (1.46) nos queda:

$$u_3(x_3) = \frac{p}{E} x_3, \quad (1.48)$$

que es precisamente el resultado que propone Sokolnikoff en [7].

1.4. Resolución numérica del modelo de extensión pura

El objetivo de este apartado es aproximar las soluciones de los modelos MOD1 y MOD2 por medio del método de diferencias finitas. Deduiremos la discretización de los dos modelos y se implementará un programa en Matlab que nos devuelva la solución aproximada para los casos que consideramos en los ejemplos del capítulo.

1.4.1. Resolución numérica MOD1

El modelo de extensión pura MOD1 está determinado por (ver Cuadro (1.1)-MOD1):

$$\left\{ \begin{array}{l} -E \frac{d}{dx_3} \left(\frac{du_3(x_3)}{dx_3} \right) = \frac{q_3}{A}, \\ u_3(0) = 0, \\ EA \frac{du_3(L)}{dx_3} = P. \end{array} \right.$$

En lo que resta de apartado, suprimiremos los subíndices de u_3 , q_3 y x_3 para descargar la notación. Además, usaremos u'' y u' para denotar a las derivadas segunda y primera de u , respectivamente. De esta forma, el problema a discretizar será el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = 0, \\ -Eu''(x) = \frac{q(x)}{A}, \\ EAu'(L) = P. \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Comenzamos por discretizar el intervalo $[0, L]$ considerando una partición regular:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = L,$$

siendo:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad 0 \leq i \leq n, \quad h = \frac{L}{n+1}.$$

Dado que u_0 es conocida, nuestras incógnitas serán:

$$u_i, \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

donde u_i denota la aproximación de $u(x_i)$.

Consideramos los puntos $x_i, 1 \leq i \leq n$, usando la fórmula de diferencias centradas para

aproximar la derivada segunda (la cual podemos consultar en [11]):

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + O(h^2),$$

para cada punto considerado, reemplazando cada término $u(x_i)$ por su correspondiente aproximación u_i , eliminando los términos $O(h^2)$ y sustituyendo en la ecuación diferencial del problema obtenemos las ecuaciones discretizadas para los puntos $x_i, 1 \leq i \leq n$:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -\frac{q_i}{EA}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.50)$$

siendo:

$$q_i = q(x_i).$$

Nótese que para $i = 1$, dado que $u(0) = 0$, la ecuación discretizada correspondiente es:

$$\frac{u_2 - 2u_1}{h^2} = -\frac{q_1}{EA}.$$

Para $i = n+1$, empleamos una aproximación descentrada hacia la izquierda para aproximar la derivada segunda [11]:

$$u''(L) \approx \frac{u'(L) - u'(L - h/2)}{h/2},$$

seguida de una fórmula centrada de tres puntos [11] para aproximar $u'(L - h/2)$:

$$u'(L - h/2) = \frac{u(L) - u(L - h)}{h}.$$

Finalmente obtenemos la siguiente aproximación:

$$u''(L) \approx \frac{u'(L) + \frac{u(L - h) - u(L)}{h}}{h/2}$$

Conocido el valor de $u'(L)$ a partir de la condición de contorno, y utilizando la ecuación diferencial llegamos a la siguiente ecuación discretizada:

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{q_{n+1}h^2}{2EA} - \frac{Ph}{EA},$$

que, junto con las anteriores n ecuaciones constituyen el problema discretizado. Podemos representar el problema discretizado en notación matricial como sigue:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{EA} \\ \frac{q_2}{EA} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{q_n}{EA} \\ \frac{q_{n+1}}{2EA} + P/(EAh) \end{bmatrix}$$

Este problema constituye un sistema tridiagonal con un total de $n + 1$ ecuaciones y $n + 1$ incógnitas que se puede resolver mediante cualquiera de los métodos tradicionales. Aplicamos esta discretización a los datos del ejemplo 3.1, en el cual recordamos se obtuvo la siguiente solución analítica:

$$u_3(x_3) = 5,6 \cdot 10^{-7} x_3^2 - 1,12 \cdot 10^{-5} x_3$$

En la figura 1.4.1 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solu-

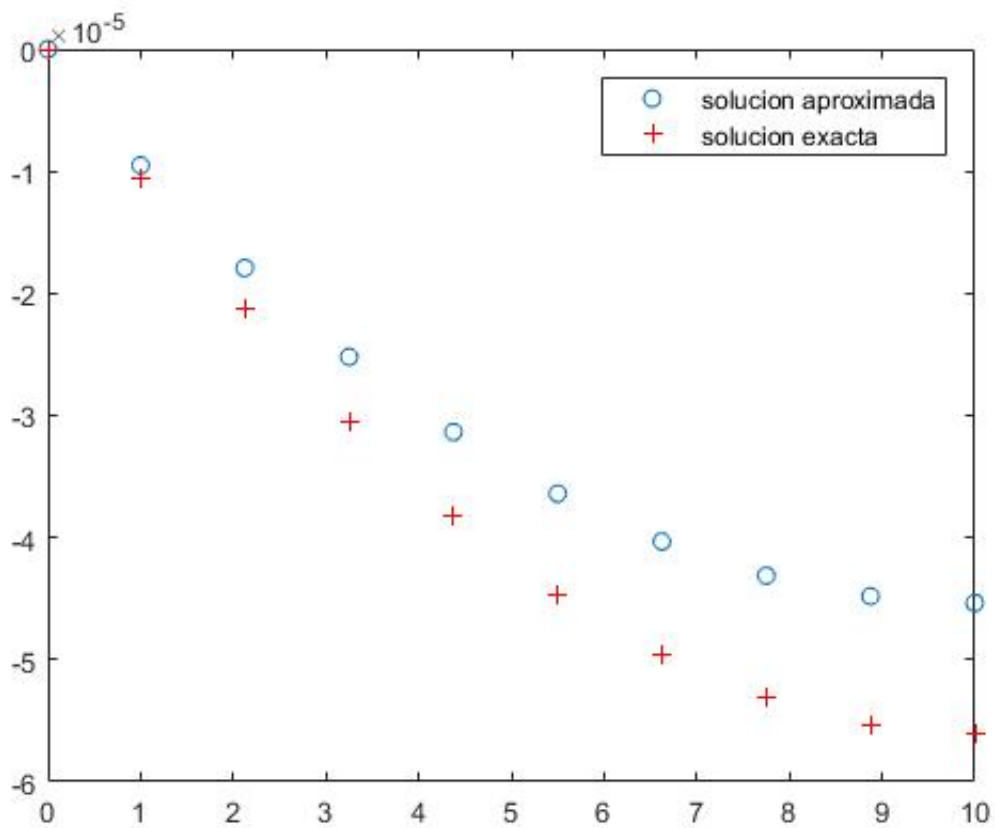


Figura 1.3: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

ción analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 1$ donde se obtuvo un error de $1,0639 \cdot 10^{-5}$. Por construcción, nuestro método es de orden uno lo que significa que el error local es directamente proporcional al cuadrado del tamaño del paso, y el error global es proporcional al tamaño del paso. En la figura 1.4.1 se muestra un plot de los

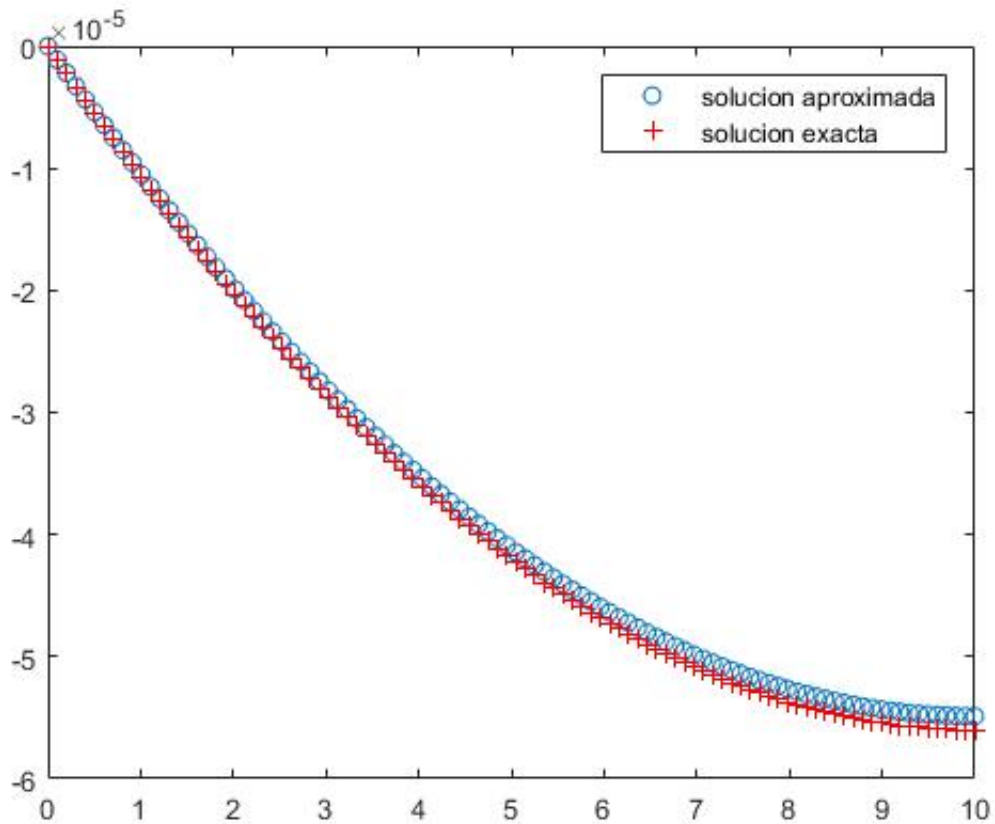


Figura 1.4: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 0,1$, donde se obtuvo un error de $1,1137 \cdot 10^{-6}$. Se ha dividido el paso por 10 y se obtuvo un error global con la misma disminución por tanto este error es el esperado considerando el orden del método.

En conclusión, hemos obtenido resultados satisfactorios en la resolución numérica del problema, sirviendo ésta de apoyo a la resolución analítica del apartado anterior.

1.4.2. Resolución numérica MOD2

El modelo de flexión pura MOD2 está determinado por (ver Cuadro (1.1)-MOD2):

$$\left\{ \begin{array}{l} EAu'(0) = P, \\ u''(x) = -\frac{q(x)}{EA}, \quad x \in (0, L) \\ EAu'(L) = P. \end{array} \right. \quad (1.51)$$

Sin embargo, ya vimos que éste no tiene solución única, en hipótesis de existencia, si no añadíamos alguna restricción adicional.

Vamos a suponer que estamos en hipótesis de existencia de solución y además que la viga se mantiene fija en su posición central, condición que nos va a permitir considerar este problema de discretización como dos problemas independientes:

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} u'(0) = \frac{P}{EA}, \\ u''(x) = -\frac{q(x)}{EA}, \quad x \in (0, L/2) \\ u(L/2) = 0. \end{array} \right. \quad (1.52)$$

y

$$P_2 \left\{ \begin{array}{l} u(L/2) = 0, \\ u''(x) = -\frac{q(x)}{EA}, \quad x \in (L/2, L) \\ u'(L) = \frac{P}{EA}. \end{array} \right. \quad (1.53)$$

Comenzamos por discretizar el intervalo $[0, L/2]$ considerando una partición regular:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = L/2,$$

siendo:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad 0 \leq i \leq n, \quad h = \frac{L}{n+1}.$$

Conservando este valor de h , discretizamos el intervalo $[L/2, L]$ de la misma forma:

$$L/2 = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_{n+1} = L,$$

siendo:

$$x'_{i+1} = x'_i + h, \quad 0 \leq i \leq n,$$

Siguiendo con esta misma notación, u_i denota la aproximación de $u(x_i)$, mientras que u'_i denota la aproximación de $u'(x'_i)$, no confundir con la expresión de la derivada de u , u' . Como estamos en hipótesis de existencia de solución, la función q que define la carga por unidad de longitud a la que está sometida la viga tiene que ser antisimétrica respecto a $x = L/2$. Por tanto, simplemente resolveremos el problema P_2 utilizando la misma discretización que se determinó para el modelo MOD1 y, como los desplazamientos deben de ser antisimétricos respecto de $x = L/2$, las aproximaciones u_i que son solución de P_1 se calcularán de manera que:

$$u_i = -u'_{n+1-i}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Además, de la condición de contorno:

$$u_{n+1} = u'_0 = 0.$$

Por lo que ya tenemos el problema discretizado completo. Aplicamos esta discretización a los datos del ejemplo 1.2, en el cual recordamos se obtuvo la siguiente solución analítica:

$$u_3(x_3) = -2,4 \cdot 10^{-10} x_3^3 + 3,64 \cdot 10^{-9} x_3^2 + 7,3 \cdot 10^{-8} x_3 - 4,24 \cdot 10^{-7}$$

En la figura 1.4.2 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 0,5$ donde se obtuvo un error de $5,0965 \cdot 10^{-8}$. Por construcción, nuestro método es de orden uno lo que significa que el error local es directamente proporcional al cuadrado del tamaño del paso, y el error global es proporcional al tamaño del paso. En la figura 1.4.2 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 0,05$, donde se obtuvo un error de $7,9112 \cdot 10^{-9}$. El error ha disminuido en la orden de lo esperado, considerando el orden del método.

En conclusión, hemos obtenido resultados satisfactorios en la resolución numérica del problema, sirviendo ésta de apoyo a la resolución analítica hallada en el apartado anterior.

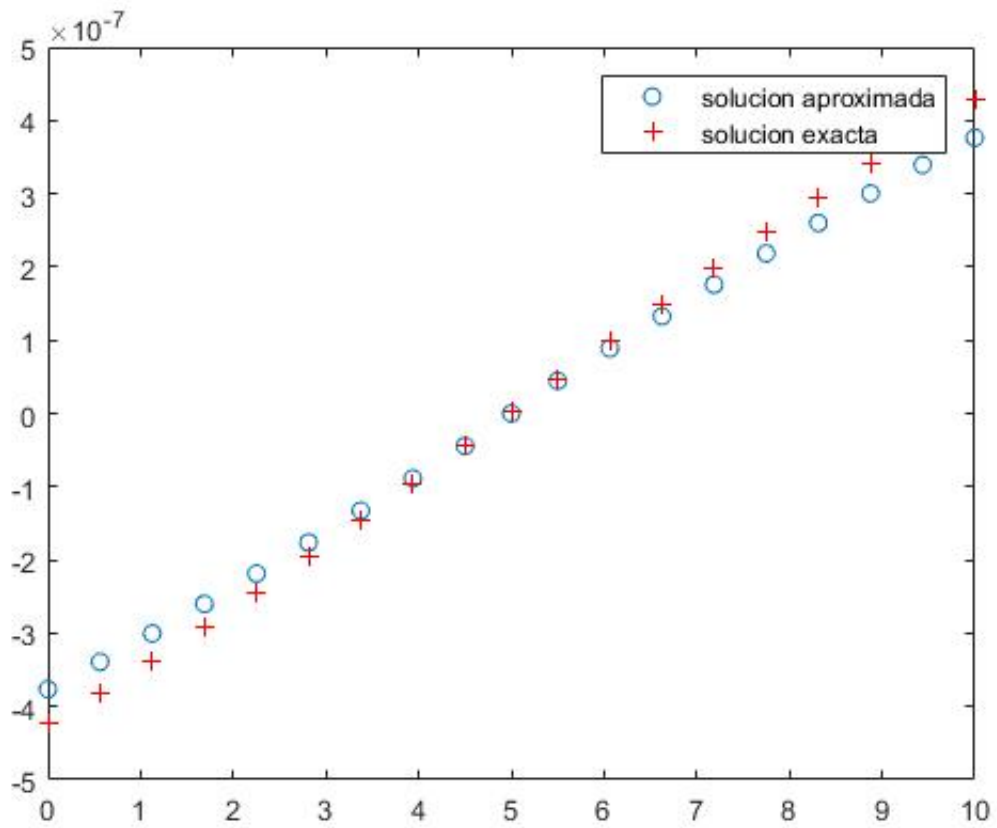


Figura 1.5: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

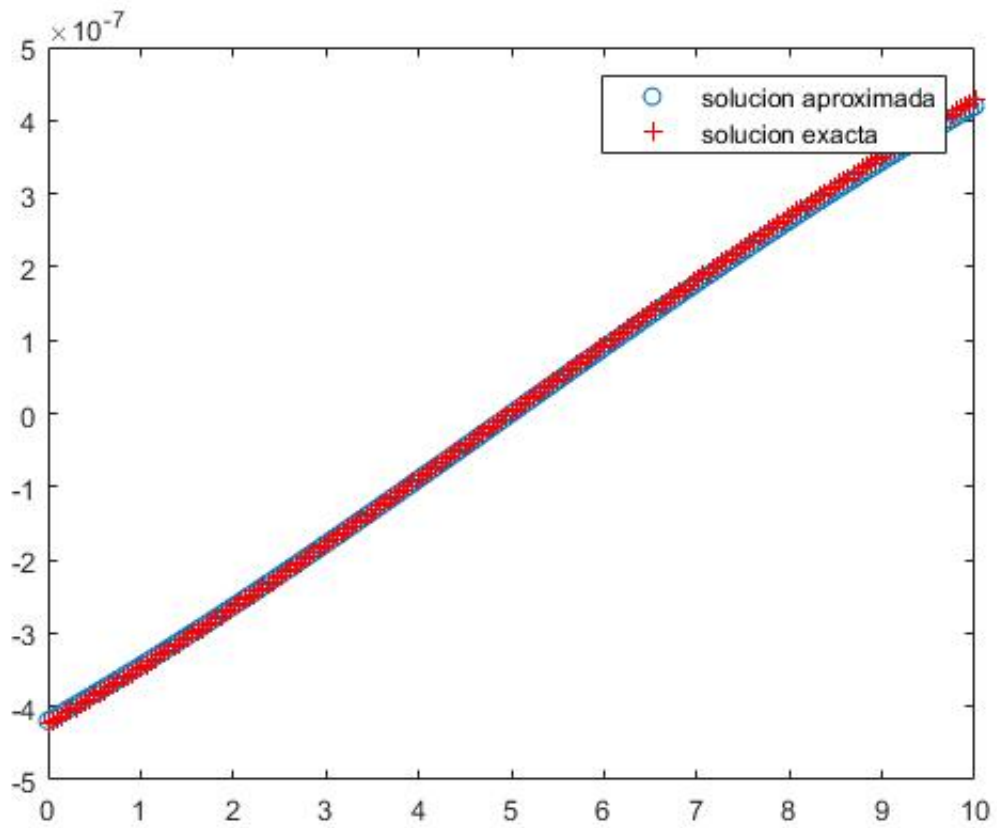


Figura 1.6: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

Capítulo 2

El modelo de viga sometida a flexión pura: Teoría de Euler-Bernoulli

El modelo que vamos a estudiar es el propuesto por Leonhard Euler y Daniel Bernoulli a principios del siglo XVIII. Tenemos que considerar que la viga está bajo las hipótesis siguientes (las cuales podemos consultar en [8]):

- Se supone que la sección transversal es plana antes y después de la deformación.
- La viga es recta con sección constante y de doble simetría en todo el dominio.
- Se supone la presencia de un estado uni-axial de tensiones solamente en la dirección del eje lo que implica existencia de flexión pura.
- El material es homogéneo, isótropo y verifica la ley de Hooke.
- El estado de cargas por unidad de longitud es tal que $q_3 = 0$ a lo largo de todo el intervalo $[0, L]$.

El detalle de la modelización indicada a continuación puede encontrarse en [5]. En términos de las rotaciones el desplazamiento se expresa como:

$$u(x_1, x_2, x_3) = (u_1(x_3), u_2(x_3), -x_1\theta_2(x_3) + x_2\theta_1(x_3)), \quad (2.1)$$

siendo

$$\theta_1(x_3) = -\frac{du_2(x_3)}{dx_3}, \quad \theta_2(x_3) = \frac{du_1(x_3)}{dx_3}. \quad (2.2)$$

Sea $\vec{q}(x_3) = (q_1(x_3), q_2(x_3), q_3(x_3)) = (q_1(x_3), q_2(x_3), 0)$ la carga por unidad de longitud tal y como se ha definido en el capítulo 1. Entonces podemos escribir las ecuaciones de

equilibrio 1d bajo la teoría de Euler-Bernoulli de la siguiente manera:

$$\frac{d^2}{dx_3^2} \left(EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) = q_1(x_3), \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2}{dx_3^2} \left(EI_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) = q_2(x_3), \quad (2.4)$$

siendo I_1 y I_2 los momentos de inercia asociados a la flexión de la sección transversal ω :

$$I_1 = \int_{\omega} x_2^2 dx_1 dx_2 \quad , \quad I_2 = \int_{\omega} x_1^2 dx_1 dx_2.$$

Sean M_1 y M_2 los momentos flectores en las direcciones x_1 y x_2 respectivamente. Ambos se pueden escribir en términos del desplazamiento, de los momentos de inercia, y del módulo de Young como se muestra a continuación:

$$M_1 = -EI_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2}, \quad (2.5)$$

$$M_2 = EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2}. \quad (2.6)$$

Por otro lado, la ecuación que relaciona los esfuerzos con los momentos en un punto (x_1, x_2) de la sección de la viga viene dada por la expresión

$$\sigma_{33} = \frac{M_1(x_3)}{I_1} x_2 - \frac{M_2(x_3)}{I_2} x_1. \quad (2.7)$$

Para el mismo punto (x_1, x_2) , el cual aparece marcado en rojo en la Figura 2.1, denotamos por L_α a la recta paralela al eje x_α que pasa por dicho punto y cuya longitud en el dominio es b_α , con $\alpha = 1, 2$. Obsérvese que b_1 y L_1 son función de x_2 , mientras que b_2 y L_2 son función de x_1 .

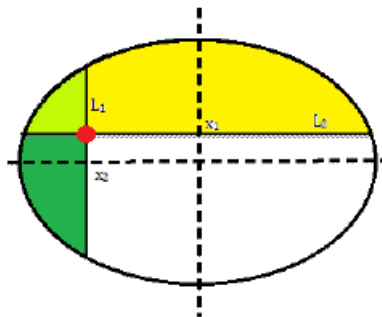


Figura 2.1: Sección transversal

Sean $Q_1(x_3)$ y $Q_2(x_3)$ las cargas totales en las direcciones x_1 y x_2 respectivamente. Éstas vienen dadas por:

$$Q_1(x_3) = -\frac{dM_2(x_3)}{dx_3} = -EI_2 \frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3}, \quad (2.8)$$

$$Q_2(x_3) = \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} = -EI_1 \frac{d^3 u_2(x_3)}{dx_3^3}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, para completar el modelo son necesarias las expresiones que rigen las tensiones de corte en la sección transversal. Es habitual utilizar las ecuaciones de Jourawski-Colignon, [9]. A partir de la tercera ecuación de equilibrio podemos llegar a:

$$\sigma_{31} = \frac{Q_1(x_3)}{I_2 b_2(x_1)} S_2(x_1), \quad (2.10)$$

$$\sigma_{32} = \frac{Q_2(x_3)}{I_1 b_1(x_2)} S_1(x_2), \quad (2.11)$$

siendo:

$$S_2(x_1) = \int_{L_2(x_1)} \left(\int_{x_1}^{c(x'_1)} x'_1 dx'_1 \right) dx'_2, \quad (2.12)$$

$$S_1(x_2) = \int_{L_1(x_2)} \left(\int_{x_2}^{c(x'_2)} x'_2 dx'_1 \right) dx'_2, \quad (2.13)$$

donde $c(x_i)$ denota el valor que toma x_i en la frontera de ω para el punto considerado. Así el modelo de Euler-Bernoulli es:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx_3^2} \left(EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) = q_1(x_3), \\ \frac{d^2}{dx_3^2} \left(EI_1 \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) = q_2(x_3), \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{31} = \frac{Q_1(x_3)}{I_2 b_2} S_2(x_1), \\ \sigma_{32} = \frac{Q_2(x_3)}{I_1 b_1} S_1(x_2), \\ \sigma_{33} = \frac{M_1(x_3)}{I_1} x_2 - \frac{M_2(x_3)}{I_2} x_1, \end{array} \right. \end{cases}$$

con $Q_\alpha(x_3)$ y $M_\alpha(x_3)$, $\alpha = 1, 2$, definidos por (2.8)-(2.9) y (2.5)-(2.6), respectivamente. Sin embargo, sólo con estas expresiones no podríamos llegar a una solución concreta para un caso particular. Para ello requerimos de ciertas condiciones de contorno. La Tabla 2 recoge las posibles condiciones que se pueden dar en los extremos de la viga en este modelo.

Condición extremo viga	Identificación	Fórmula Matemática
Dirichlet/Borde fijo	Desplazamiento nulo Rotación nula	$u_1 = 0, u_2 = 0,$ $\frac{du_1}{dx_3} = 0, \frac{du_2}{dx_3} = 0,$
Libre de fuerzas	Momento flector nulo Esfuerzo cortante nulo	$\frac{d^2u_1}{dx_3^2} = 0, \frac{d^2u_2}{dx_3^2} = 0,$ $\frac{d^3u_1}{dx_3^3} = 0, \frac{d^3u_2}{dx_3^3} = 0,$
Extremo articulado o simplemente apoyada	Desplazamiento nulo Momento nulo	$u_1 = 0, u_2 = 0,$ $\frac{d^2u_1}{dx_3^2} = 0, \frac{d^2u_2}{dx_3^2} = 0,$
Fuerza de valor $(P_1, P_2, 0)$ y momento resultante nulo	Carga total dirección 1 igual a P_1 Carga total dirección 2 igual a P_2 Momentos nulos	$-\frac{d}{dx_3} \left(EI_2 \frac{d^2u_1}{dx_3^2} \right) = P_1,$ $-\frac{d}{dx_3} \left(EI_1 \frac{d^2u_2}{dx_3^2} \right) = P_2,$ $\frac{d^2u_1}{dx_3^2} = 0, \frac{d^2u_2}{dx_3^2} = 0.$

Cuadro 2.1: Condiciones de contorno en el modelo de Euler Bernoulli.

2.1. Solución general del modelo 1D: viga sometida a flexión pura Teoría de Euler-Bernoulli

Recordamos el modelo de Euler-Bernoulli:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx_3^2} \left(EI_2 \frac{d^2u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) = q_1(x_3), \\ \frac{d^2}{dx_3^2} \left(EI_1 \frac{d^2u_2(x_3)}{dx_3^2} \right) = q_2(x_3), \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \frac{Q_1(x_3)}{I_2 b_2(x_1)} S_2(x_1), \\ \sigma_{32} = \frac{Q_2(x_3)}{I_1 b_1(x_2)} S_1(x_2), \\ \sigma_{33} = \frac{M_1(x_3)}{I_1} x_2 - \frac{M_2(x_3)}{I_2} x_1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Antes de empezar con la resolución del modelo, es conveniente dar una notación para las primitivas de las integrales múltiples de la carga para así agilizar los cálculos y descargar la notación. Siguiendo con la idea del capítulo anterior, extendemos la función m a las posibles integrales múltiples de la carga que irán apareciendo en todo el capítulo. Así, para la componente i -ésima de la carga por unidad de longitud se denotan las primitivas de interés por medio de la función m como sigue:

$$m_{i,4}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s \left(\int_0^t \left(\int_0^u q_i(l) dl \right) du \right) dt \right) ds,$$

2.1. SOLUCIÓN GENERAL DEL MODELO 1D: VIGA SOMETIDA A FLEXIÓN PURA TEORÍA DE EUL

$$m_{i,3}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s \left(\int_0^t q_i(u) du \right) dt \right) ds,$$

$$m_{i,2}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s q_i(t) dt \right) ds,$$

$$m_{i,1}(x_3) = \int_0^{x_3} q_i(d) ds.$$

De acuerdo con esto, buscamos la solución general para el modelo. Comenzamos por encontrar expresiones para las componentes primera y segunda del desplazamiento \vec{u} , ya que la tercera quedaría definida a partir de las dos primeras gracias a (2.1). Para hallar la expresión de u_1 (análogo para u_2) bastará con integrar consecutivamente con respecto a x_3 la primera de las igualdades de (2.14). Viendo la forma que tiene el momento de inercia I_2 ,

$$I_2 = \int_w x_1^2 dx_1 dx_2,$$

vemos que es una constante y, por tanto, que no depende de la coordenada x_3 . Por ello, considerando constante el módulo de Young, tenemos la siguiente equivalencia:

$$\frac{d^2}{dx_3^2} \left(EI_2 \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} \right) = EI_2 \frac{d^4 u_1(x_3)}{dx_3^4} = q_1(x_3),$$

y, por tanto:

$$\frac{d^4 u_1(x_3)}{dx_3^4} = \frac{q_1(x_3)}{EI_2}. \quad (2.16)$$

Integrando un total de cuatro veces llegamos al resultado buscado:

$$\frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3} = \frac{1}{EI_2} \int q_1(x_3) dx_3 + C_{1,1}$$

$$\frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} = \frac{1}{EI_2} \int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 + C_{1,1} x_3 + C_{1,2}$$

$$\frac{du_1(x_3)}{dx_3} = \frac{1}{EI_2} \int \left(\int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 + C_{1,1} x_3^2 + C_{1,2} x_3 + C_{1,3}$$

$$u_1(x_3) = \frac{1}{EI_2} \int \left(\int \left(\int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 + \frac{C_{1,1}}{6} x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2} x_3^2 + C_{1,3} x_3 + C_{1,4}. \quad (2.17)$$

En términos de la función m , podemos reescribir la expresión anterior como sigue:

$$u_1(x_3) = \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{6} x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2} x_3^2 + C_{1,3} x_3 + C_{1,4}. \quad (2.18)$$

Procediendo de manera análoga para la segunda de las expresiones de (2.14) obtenemos la segunda componente del desplazamiento:

$$u_2(x_3) = \frac{1}{EI_1} m_{2,4}(x_3) + \frac{C_{2,1}}{6} x_3^3 + \frac{C_{2,2}}{2} x_3^2 + C_{2,3} x_3 + C_{2,4}. \quad (2.19)$$

Con esto ya tendríamos definido las expresiones mas generales para el desplazamiento de una viga sometida a flexión pura. Sin embargo, éste queda en función de las constantes de integración, $C_{\alpha,j}$ $\alpha = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$; que dependerán de las condiciones que se den en los extremos de la viga en cada situación.

Para acabar de resolver el modelo de viga todavía tenemos que hallar las tensiones que actúan sobre la propia viga. Nos centraremos en calcular la tensión cortante σ_{31} . La tensión viene dada en función de la carga total en la dirección x_1 que, como ya vimos en (2.8) viene determinada por:

$$Q_1(x_3) = -\frac{dM_2(x_3)}{dx_3} = -EI_2 \frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3}. \quad (2.20)$$

Si sustituimos éste valor en la primera igualdad de (2.15) la expresión resultante

$$\sigma_{31} = \frac{Q_1(x_3)}{I_2 b_2(x_1)} S_2(x_1) = -\frac{E}{b_2(x_1)} \frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3} S_2(x_1), \quad (2.21)$$

está en función de S_2 y de la derivada tercera de u_1 , la cual se obtiene de la primera de las relaciones (2.18):

$$\frac{d^3 u_1(x_3)}{dx_3^3} = \frac{1}{EI_2} \left(\int q_1 dx_3 + C_{1,1} \right). \quad (2.22)$$

De esta forma, podemos reescribir la ecuación (2.21) de la siguiente manera:

$$\sigma_{31} = \frac{-S_2(x_1)}{b_2(x_1) I_2} \left(\int q_1 dx_3 + C_{1,1} \right). \quad (2.23)$$

Procediendo de forma análoga llegamos a una expresión similar para σ_{23}

$$\sigma_{32} = -\frac{S_1(x_2)}{b_1(x_2) I_1} \left(\int q_2 dx_3 + C_{2,1} \right). \quad (2.24)$$

Ya sólo nos quedaría por deducir la tensión axial σ_{33} . Considerando las ecuaciones (2.5)-(2.7) sabemos que σ_{33} viene dada por:

$$\sigma_{33} = -E \frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} x_2 - E \frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} x_1. \quad (2.25)$$

Sustituyendo las derivadas segundas de las dos primeras componentes del desplazamiento obtenidas en (2.18)

$$\frac{d^2 u_2(x_3)}{dx_3^2} = \frac{1}{EI_1} \left[\int \left(\int q_2 dx_3 \right) dx_3 + C_{2,1} x_3 + C_{2,2} \right],$$

$$\frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} = \frac{1}{EI_2} \left[\int \left(\int q_1 dx_3 \right) dx_3 + C_{1,1} x_3 + C_{1,2} \right],$$

en (2.25) y haciendo las simplificaciones oportunas llegamos a:

$$\sigma_{33} = - \int \left(\int \left(x_2 \frac{q_2}{I_1} + x_1 \frac{q_1}{I_2} \right) dx_3 \right) dx_3 - \left(x_2 \frac{C_{2,1}}{I_1} + x_1 \frac{C_{1,1}}{I_2} \right) x_3 - x_2 \frac{C_{2,2}}{I_1} - x_1 \frac{C_{1,2}}{I_2}. \quad (2.26)$$

Con esto, ya hemos obtenido las expresiones generales del desplazamiento y del campo de tensiones que experimenta una viga bajo la teoría de Euler-Bernoulli. Como ya hemos mencionado, necesitamos de algún tipo de condiciones de contorno para poder resolver el modelo. Dichas condiciones las tenemos en el Cuadro (2). Nosotros vamos a intentar dar solución a los casos particulares del Cuadro (2.1) siguientes:

Modelo	Condición en $x_3 = 0$	Condición en $x_3 = L$	Fórmula Matemática
MOD21	Extremo articulado	Extremo articulado	$u_1(0) = 0, u_1(L) = 0,$ $\frac{d^2 u_1(0)}{dx_3^2} = 0, \frac{d^2 u_1(L)}{dx_3^2} = 0,$
	o simplemente apoyada	o simplemente apoyada	$u_2(0) = 0, u_2(L) = 0,$ $\frac{d^2 u_2(0)}{dx_3^2} = 0, \frac{d^2 u_2(L)}{dx_3^2} = 0$
MOD22	Dirichlet	Dirichlet	$u_1(0) = 0, u_1(L) = 0,$ $\frac{du_1(0)}{dx_3} = 0, \frac{du_1(L)}{dx_3} = 0,$
	o borde fijo	o borde fijo	$u_2(0) = 0, u_2(L) = 0,$ $\frac{du_2(0)}{dx_3} = 0, \frac{du_2(L)}{dx_3} = 0$

Cuadro 2.2: Condiciones de contorno en el modelo de Euler Bernoulli.

2.2. Solución particular viga modelo MOD21

El modelo MOD21 se corresponde a una viga simplemente apoyada. Que la viga esté simplemente apoyada se traduce a las siguientes condiciones de contorno (las cuales están recogidas en el Cuadro 2.1):

$$u_1(0) = 0, \quad \frac{d^2 u_1(0)}{dx_3^2} = 0, \quad (2.27)$$

$$u_1(L) = 0, \quad \frac{d^2 u_1(L)}{dx_3^2} = 0. \quad (2.28)$$

$$u_2(0) = 0, \quad \frac{d^2 u_2(0)}{dx_3^2} = 0, \quad (2.29)$$

$$u_2(L) = 0, \quad \frac{d^2 u_2(L)}{dx_3^2} = 0. \quad (2.30)$$

Únicamente calcularemos la primera de las coordenadas del desplazamiento, ya que la segunda se calcularía mediante un proceso análogo. La derivada segunda de u_1 , que corresponde a la segunda de las ecuaciones en (2.17), viene dada por:

$$\frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} = \frac{1}{EI_2} m_{1,2}(x_3) + C_{1,1} x_3 + C_{1,2}. \quad (2.31)$$

Si evaluamos (2.31) y (2.18) en 0, de las condiciones de contorno (2.27) se deduce que:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(0) + C_{1,4} = 0 \implies \\ &\implies C_{1,4} = -\frac{1}{EI_2} m_{1,4}(0). \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1(0)}{dx_3^2} &= \frac{1}{EI_2} m_{1,2}(0) + C_{1,2} = 0 \implies \\ &\implies C_{1,2} = -\frac{1}{EI_2} m_{1,2}(0). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sustituyendo los valores de $C_{1,2}$ y $C_{1,4}$ calculados en (2.32) y (2.33), en las expresiones (2.31) y (2.18) se obtienen los siguientes resultados:

$$u_1(x_3) = \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{6} x_3^3 - \frac{1}{2EI} m_{1,2}(0) x_3^2 + C_{1,3} x_3 - \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(0) \quad (2.34)$$

$$= \frac{1}{EI_2} (m_{1,4}(x_3) - m_{1,2}(0) x_3^2 - m_{1,4}(0)) + \frac{C_{1,1}}{6} x_3^3 + C_{1,3} x_3, \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2 u_1(x_3)}{dx_3^2} = \frac{1}{EI} m_{1,2}(x_3) + C_1 x_3 - \frac{1}{EI} m_{1,2}(0). \quad (2.36)$$

Podemos obtener el valor de $C_{1,1}$ al evaluar (2.36) en L e igualar a 0, como nos dicta la primera de las condiciones (2.28):

$$\frac{d^2 u_1(L)}{dx_3^2} = \frac{1}{EI_2} m_{1,2}(L) + C_{1,1} L - \frac{1}{EI_2} m_{1,2}(0) = 0$$

$$\implies C_{1,1} = \frac{1}{EI_2 L} m_{1,2}(0) - \frac{1}{EI_2 L} m_{1,2}(L) \quad (2.37)$$

Sustituyendo $C_{1,1}$ en (2.35) y haciendo uso de la segunda condición de (2.28) obtenemos $C_{1,3}$:

$$u_1(L) = \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(L) + \frac{C_{1,1}}{6} L^3 - \frac{L^2}{2EI_2} m_{1,2}(0) + C_{1,3} L - \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(0) = 0 \quad (2.38)$$

$$\implies C_{1,3} = m_{1,4}(0) + \frac{L}{2EI_2} m_{1,2}(0) - \frac{L}{6EI_2} m_{1,2}(0) + \frac{L}{6EI_2} m_{1,2}(L) - \frac{1}{EI_2 L} m_{1,4}(L) \quad (2.39)$$

Ya hemos obtenido la forma general que tomarán todas las constantes que determinan la componente u_1 del desplazamiento y, por tanto, su expresión general, que resultará de sustituir las expresiones de dichas constantes en (2.18). Omitiremos expresarla debido a su elevada dimensión. La componente u_2 se obtendría de manera análoga y con el mismo procedimiento se llegaría a resultados idénticos salvo la consideración de q_2 y I_1 en lugar de q_1 y I_2 , respectivamente.

Ejemplo 2.1. A continuación se calculará el desplazamiento y la tensión de una viga de madera situada a lo largo del eje x_3 , simplemente apoyada y cargada de modo uniforme. La viga tiene longitud 10 metros y es de sección cuadrada de lado $a = 0,5$ metros. El módulo de Young de la madera es $E = 7 \cdot 10^9 Pa$ y además la carga vale $\vec{q} = -700\vec{e}_1 N/m$. El momento de inercia de la viga vale ([10]):

$$I_1 = I_2 = \frac{a^4}{12} = 5,2 \cdot 10^{-3}.$$

La idea será obtener los valores de las constantes $C_{\alpha,j}$ haciendo uso de las expresiones deducidas anteriormente para así sustituir dichos valores en (2.18).

Comencemos por fijar las expresiones de las primitivas de la integral cuádruple y la integral doble de q_1 considerada:

$$m_{1,4}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s \left(\int_0^t \left(\int_0^u q_1(l) dl \right) du \right) dt \right) ds = -\frac{700x_3^4}{24},$$

$$m_{1,2}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s q_1(t) dt \right) ds = -\frac{700x_3^2}{2}.$$

Para hallar los valores de las constantes $C_{i,j}$ necesitaremos las evaluaciones de (2.1) y (2.1)

en 0 y L ,

$$\begin{aligned}m_{1,4}(0) &= 0, \\m_{1,4}(L) &= -\frac{700L^4}{24} = -2,92 \cdot 10^5, \\m_{1,2}(0) &= 0, \\m_{1,2}(L) &= -\frac{700L^2}{2} = -3,5 \cdot 10^3.\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (2.32) y (2.33) vemos que las constantes $C_{1,2}$ y $C_{1,4}$ son nulas:

$$\begin{aligned}C_{1,4} &= -\frac{1}{EI}m_{1,4}(0) = 0 \\C_{1,2} &= -\frac{1}{EI}m_{1,2}(0) = 0\end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos (2.37) y (2.39) obtenemos los valores de $C_{1,1}$ y $C_{1,3}$:

$$\begin{aligned}C_{1,3} &= \frac{L}{6EI}m_{1,2}(L) - \frac{1}{EIL}m_{1,4}(L) = -8 \cdot 10^{-4}, \\C_{1,1} &= -\frac{1}{EIL}m_{1,2}(L) = 9,6 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

Sustituyendo las constantes calculadas en (2.18) obtenemos el resultado buscado. Así, u_1 viene dada por:

$$u_1(x_3) = -8 \cdot 10^{-7}x_3^4 + 1,6 \cdot 10^{-5}x_3^3 - 8 \cdot 10^{-4}x_3$$

2.3. Solución particular viga modelo MOD22

Ahora vamos a considerar que la viga tiene ambos extremos fijos. Esto se traduce a unas condiciones de frontera de tipo Dirichlet. Como ya es habitual, solo daremos las expresiones general de la componente u_1 , siendo éstas análogas para la componente u_2 . De esta forma, las condiciones de contorno que consideraremos son las siguientes (véase cuadro 2.1, MOD22):

$$u_1(0) = 0, \quad \frac{du_1(0)}{dx_3} = 0, \quad (2.40)$$

$$u_1(L) = 0, \quad \frac{du_1(L)}{dx_3} = 0. \quad (2.41)$$

Considerando la derivada de u_1 , que corresponde a la tercera de las ecuaciones en (2.17):

$$\frac{du_1(x_3)}{dx_3} = \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{2}x_3^2 + C_{1,2}x_3 + C_{1,3}, \quad (2.42)$$

y la expresión de u_1 (2.18) de las condiciones (2.40) es inmediato deducir los valores de $C_{1,4}$ y $C_{1,3}$:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(0) + C_{1,4} = 0 \implies \\ &\implies C_{1,4} = -\frac{1}{EI_2} m_{1,4}(0). \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_1(0)}{dx_3} &= \frac{1}{EI} m_{1,3}(0) + C_{1,3} = 0 \implies \\ &\implies C_{1,3} = -\frac{1}{EI} m_{1,3}(0). \end{aligned} \quad (2.44)$$

De las condiciones de contorno (2.41) y de las expresiones (2.18) y (2.42) se deducen las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{du_1(L)}{dx_3} = \frac{1}{EI_2} m_{1,3}(L) + C_{1,1} \frac{L^2}{2} + C_{1,2} L + C_{1,3} = 0, \quad (2.45)$$

$$u_1(L) = \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(L) + \frac{L^3}{6} C_{1,1} + \frac{L^2}{2} C_{1,2} + LC_{1,3} + C_{1,4} = 0. \quad (2.46)$$

Considerando que $C_{1,3}$ y $C_{1,4}$ son conocidas ((2.44),(2.42)) las anteriores ecuaciones constituyen un sistema compatible determinado de dos ecuaciones con $C_{1,1}$ y $C_{1,2}$ como incógnitas. Bastará con resolverlo para hallar todas las constantes involucradas en u_1 y dar por resuelto el problema propuesto. De esta forma, el sistema a resolver será el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(L) + \frac{L^3}{6} C_{1,1} + \frac{L^2}{2} C_{1,2} + LC_{1,3} + C_{1,4} = 0, \\ \frac{1}{EI_2} m_{1,3}(L) + \frac{L^2}{2} C_{1,1} + LC_{1,2} + C_{1,3} = 0. \end{cases}$$

Comenzamos por restarle a la segunda ecuación multiplicada por $L/2$ la primera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} &\frac{L}{2EI_2} m_{1,3}(L) + \frac{L^3}{4} C_{1,1} + \frac{L^2}{2} C_{1,2} + \frac{L}{2} C_{1,3} = 0 \\ &- \left(\frac{1}{EI_2} m_{1,4}(L) + \frac{L^3}{6} C_{1,1} + \frac{L^2}{2} C_{1,2} + LC_{1,3} + C_{1,4} = 0 \right) \\ &\hline &\frac{L}{2EI} m_{1,3}(L) - \frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} + \frac{L^3}{12} C_{1,1} - \frac{L}{2} C_{1,3} - C_{1,4} = 0 \end{aligned}$$

En la ecuación resultante sólo tenemos como incógnita $C_{1,1}$. Al despejar nos queda:

$$C_{1,1} = \frac{12}{L^3} \left(\frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{L}{2EI} m_{1,3}(L) + \frac{L}{2} C_{1,3} + C_{1,4} \right) \quad (2.47)$$

Si sustituimos el valor obtenido de $C_{1,1}$ en la segunda ecuación y despejamos $C_{1,2}$ habremos resuelto el sistema. De esta manera nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{m_{1,3}(L)}{EI} + \frac{6}{L} \left[\frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{L}{2EI} m_{1,3}(L) + \frac{L}{2} C_{1,3} + C_{1,4} \right] + LC_{1,2} + C_{1,3} &= 0 \\ -\frac{2}{EI} m_{1,3}(L) + \frac{6}{LEI} m_{1,4}(L) + 4C_{1,3} + \frac{6}{L} C_{1,4} + LC_{1,2} &= 0 \implies \\ \implies C_{1,2} = \frac{2}{LEI_2} m_{1,3}(L) - \frac{6}{L^2 EI_2} m_{1,4}(L) - \frac{4}{L} C_{1,3} - \frac{6}{L^2} C_{1,4} \end{aligned}$$

Si sustituimos en éstas expresiones los valores de $C_{1,3}$ y $C_{1,4}$ que, expresados en términos de las correspondientes funciones $m_{1,3}$ y $m_{1,4}$, vienen dados por:

$$C_{1,3} = -\frac{m_{1,3}(0)}{EI_2}, \quad C_{1,4} = -\frac{m_{1,4}(0)}{EI_2}, \quad (2.48)$$

obtenemos la expresión general de las constantes restantes,

$$C_{1,2} = \frac{2}{LEI_2} m_{1,3}(L) - \frac{6}{L^2 EI_2} m_{1,4}(L) + \frac{4m_{1,3}(0)}{EI_2 L} + \frac{6m_{1,4}(0)}{EI_2 L^2} \quad (2.49)$$

$$C_{1,1} = \frac{12}{L^3} \left(\frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{L}{2EI} m_{1,3}(L) - \frac{Lm_{1,3}(0)}{EI_2 2} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} \right) \quad (2.50)$$

Ejemplo 2.2. Consideraremos el caso de una viga de longitud 10 metros compuesta de un material cuyo módulo de Young, E , vale $5 \cdot 10^4$. Dicha viga tiene sección cuadrada de lado 0,5 metros. La carga por unidad de superficie que soporta la viga viene dada por:

$$\vec{q} = (-x^2 + xL - L^2/4, 0, 0) \quad (2.51)$$

Como ya vimos en el ejemplo 2.1, el momento de inercia de una viga con esta sección es:

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{0,5^4}{12} = 5,2 \cdot 10^{-3},$$

siendo a la longitud de la sección de la viga. Con esta carga por unidad de longitud (2.51), la función $m_{1,4}$ asociada viene determinada por:

$$m_{1,4}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s \left(\int_0^t \left(\int_0^u q_1(l) dl \right) du \right) dt \right) ds = -\frac{x^6}{360} + \frac{L}{120} x^5 - \frac{L^2}{96} x^4. \quad (2.52)$$

Mientras que $m_{1,3}$ es:

$$m_{1,3}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s \left(\int_0^t q_1(u) du \right) dt \right) ds = -\frac{x^5}{60} + \frac{L}{24} x^4 - \frac{L^2}{24} x^3. \quad (2.53)$$

Para hallar las constantes que rigen la flexión de la viga necesitamos las evaluaciones de $m_{1,4}$ y $m'_{1,3}$ en 0 y en L . Con unos simples cálculos vemos que:

$$\begin{aligned} m_{1,4}(0) &= 0, \\ m_{1,3}(0) &= 0, \\ m_{1,4}(L) &= \frac{L^6}{360} - \frac{L}{120}L^5 + \frac{L^2}{96}L^4 = -4,86 \cdot 10^3 \\ m_{1,3}(L) &= \frac{L^5}{60} - \frac{L}{24}L^4 + \frac{L^2}{24}L^3 = -1,6667 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores, el módulo de Young y el momento de inercia en las expresiones que calculamos anteriormente para las constantes de integración ((2.48),(2.49) y (2.50)) tenemos:

$$\begin{aligned} C_{1,3} &= -\frac{m_{1,3}(0)}{EI_2} = 0, \\ C_{1,4} &= -\frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} = 0, \\ C_{1,2} &= \frac{2}{LEI_2}m_{1,3}(L) - \frac{6}{L^2EI_2}m_{1,4}(L) + \frac{4m_{1,3}(0)}{EI_2L} + \frac{6m_{1,4}(0)}{EI_2L^2} = -0,16, \\ C_{1,1} &= \frac{12}{L^3} \left(\frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{L}{2EI}m_{1,3}(L) - \frac{Lm_{1,3}(0)}{2EI_2} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} \right) = 0,16. \end{aligned}$$

Si sustituimos estos valores en la expresión (2.18) obtenemos la flexión de la viga:

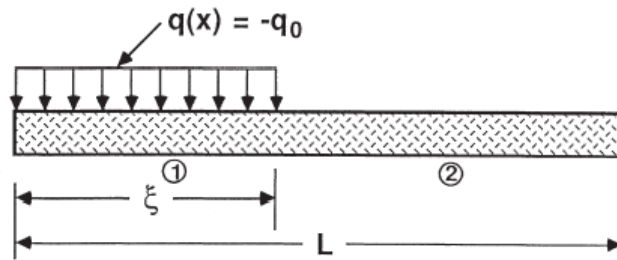
$$\begin{aligned} u_1(x_3) &= \frac{1}{EI_2} \int \left(\int \left(\int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 + \frac{C_{1,1}}{6}x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2}x_3^2 + C_{1,3}x_3 + C_{1,4} \\ &= \frac{1}{EI_2}m_{1,4}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{6}x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2}x_3^2 \\ &= -1,07 \cdot 10^{-5}x_3^6 + 3,2 \cdot 10^{-4}x_3^5 - 4 \cdot 10^{-3}x_3^4 + 2,67 \cdot 10^{-2}x_3^3 - 8 \cdot 10^{-2}x_3^2 \end{aligned}$$

2.4. Identificación con benchmark

Para este modelo utilizaremos como benchmark el recogido en [8]. En este ejemplo suponemos una viga uniforme con carga discontinua tal y como se muestra en la figura 2.4.

Se calculará únicamente una de las coordenadas del desplazamiento ya que la otra será análoga. La expresión que gobierna cualquiera de las dos coordenadas del desplazamiento, suprimiendo los subíndices, vimos que es:

$$u(x) = \frac{1}{EI} \int \left(\int \left(\int \left(\int q(x) dx \right) dx \right) dx \right) dx + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4. \quad (2.54)$$



La viga está sometida a una carga $q(x)$ en solo una porción de su longitud por lo que, $q(x) = -q_0$ para $0 \leq x \leq \xi$, y $q(x) = 0$ para $\xi \leq x \leq L$ siendo L la longitud de la viga. Debido a esta discontinuidad de carga debemos considerar las dos partes de la viga por separado. Las ecuaciones y demás términos relacionados con la primera parte de la viga, la correspondiente a $0 \leq x \leq \xi$, se denotarán con el subíndice 1. Equivalentemente el subíndice 2 se corresponde con la segunda parte de la viga. De esta forma,

$$u_1(x) = \frac{1}{EI} \int \left(\int \left(\int \left(\int q_0 dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 + \frac{C_{1,1}}{6} x^3 + \frac{C_{1,2}}{2} x^2 + C_{1,3} x + C_{1,4} \quad (2.55)$$

$$= -\frac{q_0 x^4}{EI24} + \frac{C_{1,1}}{6} x^3 + \frac{C_{1,2}}{2} x^2 + C_{1,3} x + C_{1,4} \quad (2.56)$$

$$(2.57)$$

$$u_2(x) = \frac{C_{2,1}}{6} x^3 + \frac{C_{2,2}}{2} x^2 + C_{2,3} x + C_{2,4}. \quad (2.58)$$

Las condiciones de contorno en los extremos se pueden escribir fácilmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_1(0) = 0 & \quad M_1(0) = \frac{d^2 u_1(0)}{dx^2} = 0 \\ u_2(L) = 0 & \quad M_2(L) = \frac{d^2 u_2(L)}{dx^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Sin embargo no son suficientes para despejar todas las incógnitas del modelo. Una solución inmediata a este problema es considerar las ecuaciones de compatibilidad que se deben de verificar en la unión de las dos partes de la viga, que son las siguientes:

$$u_1(\xi) = u_2(\xi) \quad \frac{d^2 u_1(\xi)}{dx^2} = \frac{d^2 u_2(\xi)}{dx^2} \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2 u_1(\xi)}{dx^2} = \frac{d^2 u_2(\xi)}{dx^2} \quad \frac{d^2 u_1(\xi)}{dx^2} = \frac{d^2 u_2(\xi)}{dx^2} \quad (2.61)$$

De las dos primeras condiciones de 2.59 es inmediato deducir que $C_{1,2} = C_{1,4} = 0$. Por un lado,

$$u_1(0) = C_{1,4} = 0.$$

Por otro lado,

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} = -\frac{q_0 x^2}{2EI} + C_{1,1}x + C_{1,2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2 u_1(0)}{dx^2} = C_{1,2} = 0$$

Haciendo las sustituciones necesarias de los desplazamientos 2.55 y sus derivadas en las condiciones mencionadas anteriormente (2.59) y (2.60) llegamos a un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -C_{2,1}L = C_{2,2} \\ -\frac{q_0 \xi}{EI} + C_{1,1} = C_{2,1} \\ -\frac{q_0 \xi^2}{2EI} + C_{1,1}\xi = C_{2,1}\xi + C_{2,2} \\ -\frac{q_0 \xi^3}{EI6} + \frac{\xi^2}{2}C_{1,1} + C_{1,3} = \frac{\xi^2}{2}C_{2,1} + C_{2,2}\xi + C_{2,3} \\ -\frac{q_0 \xi^4}{EI24} + \frac{\xi^3}{6}C_{1,1} + C_{1,3}\xi = \frac{\xi^3}{6}C_{2,1} + \frac{\xi^2}{2}C_{2,2} + \xi C_{2,3} + C_{2,4} \\ \frac{L^3}{6}C_{2,1} + \frac{L^2}{2}C_{2,2} + LC_{2,3} + C_{2,4} = 0 \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Para empezar, podemos considerar las tres primeras ecuaciones como un sistema independiente:

$$\left. \begin{array}{l} -C_{2,1}L = C_{2,2} \\ -\frac{q_0 \xi^2}{2EI} + C_{1,1}\xi = C_{2,1}\xi + C_{2,2} \end{array} \right\} \Longrightarrow -\frac{q_0 \xi^2}{2EI} + C_{1,1}\xi = C_{2,1}\xi + -LC_{2,1} = C_{2,1}(\xi - L)$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{q_0 \xi^2}{2EI} + C_{1,1}\xi = C_{2,1}(\xi - L) \\ -\frac{q_0 \xi}{EI} + C_{1,1} = C_{2,1} \end{array} \right\} \Longrightarrow -\frac{q_0 \xi}{EI} + C_{1,1} = -\frac{q_0 \xi^2}{2EI(\xi - L)} + C_{1,1} \frac{\xi}{(\xi - L)}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{q_0\xi}{EI} + C_{1,1} &= -\frac{q_0\xi^2}{2EI(\xi-L)} + C_{1,1}\frac{\xi}{(\xi-L)} \\
\frac{1}{EI} \left(-q_0\xi + \frac{q_0\xi^2}{2(\xi-L)} \right) &= C_{1,1}\frac{L}{\xi-L} \\
C_{1,1} &= \frac{q_0}{EI} \left(\xi - \frac{\xi^2}{2L} \right) \\
C_{2,1} = -\frac{q_0\xi}{EI} + C_{1,1} &= -\frac{q_0\xi}{EI} + \frac{q_0}{EI} \left(\xi - \frac{\xi^2}{2L} \right) = -\frac{q_0\xi^2}{2EIL} \\
C_{22} = -LC_{21} &= \frac{q_0\xi^2}{2EI}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las constantes calculadas en las tres ecuaciones restantes nos encontramos con un nuevo sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{aligned}
&-\frac{q_0\xi^3}{EI6} + \frac{\xi^2}{2}C_{1,1} + C_{1,3} = \frac{\xi^2}{2}C_{2,1} + C_{2,2}\xi + C_{2,3} \implies \\
\implies -\frac{q_0\xi^3}{EI6} + \frac{\xi^2}{2}\frac{q_0}{EI} \left(\xi - \frac{\xi^2}{2L} \right) + C_{1,3} &= \frac{\xi^2}{2} - \frac{q_0\xi^2}{2EIL} + \frac{q_0\xi^2}{2EI}\xi + C_{2,3} \implies \\
&\implies C_{1,3} - \frac{q_0\xi^3}{6EI} = C_{2,3} \\
&-\frac{q_0\xi^4}{EI24} + \frac{\xi^3}{6}C_{1,1} + C_{1,3}\xi = \frac{\xi^3}{6}C_{2,1} + \frac{\xi^2}{2}C_{2,2} + \xi C_{2,3} + C_{2,4} \implies \\
\implies -\frac{q_0\xi^4}{EI24} + \frac{\xi^3}{6}\frac{q_0}{EI} \left(\xi - \frac{\xi^2}{2L} \right) + C_{1,3}\xi &= \frac{\xi^3}{6} - \frac{q_0\xi^2}{2EIL} + \frac{\xi^2}{2}\frac{q_0\xi^2}{2EI} + \xi C_{2,3} + C_{2,4} \implies \\
&\implies -\frac{q_0\xi^4}{8EI} + C_{1,3}\xi = C_{2,3}\xi + C_{2,4} \\
&\frac{L^3}{6}C_{2,1} + \frac{L^2}{2}C_{2,2} + LC_{2,3} + C_{2,4} = 0 \implies \\
\implies \frac{L^3}{6} - \frac{q_0\xi^2}{2EIL} + \frac{L^2}{2}\frac{q_0\xi^2}{2EI} + LC_{2,3} + C_{2,4} &= 0 \implies \\
&\implies -\frac{q_0\xi^2 L^2}{6EI} + C_{2,3}L + C_{2,4} = 0
\end{aligned}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases}
C_{1,3} - C_{2,3} = \frac{q_0\xi^3}{6EI} \\
-\frac{q_0\xi^4}{8EI} + C_{1,3}\xi = C_{2,3}\xi + C_{2,4} \\
-\frac{q_0\xi^2 L^2}{6EI} + C_{2,3}L + C_{2,4} = 0
\end{cases} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{q_0 \xi^4}{8EI} + C_{1,3} \xi &= C_{2,3} \xi + C_{2,4} \implies (C_{1,3} - C_{2,3}) \xi = \frac{q_0 \xi^4}{8EI} + C_{2,4} \\
&\implies C_{1,3} - C_{2,3} = \frac{q_0 \xi^3}{8EI} + \frac{C_{2,4}}{\xi}
\end{aligned}$$

Si restamos ésta expresión y la primera ecuación del sistema 2.63 llegamos a:

$$\begin{aligned}
C_{1,3} - C_{2,3} &= \frac{q_0 \xi^3}{6EI} \\
- \left(C_{1,3} - C_{2,3} = \frac{q_0 \xi^3}{8EI} + \frac{C_{2,4}}{\xi} \right) \\
\hline
0 &= \frac{q_0 \xi^3}{6EI} - \frac{q_0 \xi^3}{8EI} - \frac{C_{2,4}}{\xi}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{C_{2,4}}{\xi} = \frac{q_0 \xi^3}{6EI} - \frac{q_0 \xi^3}{8EI} \implies C_{2,4} = \frac{q_0 \xi^4}{24EI}$$

Ya sólo nos quedaría despejar $C_{1,3}$ y $C_{2,3}$ del resto de ecuaciones al sustituir el valor de $C_{2,4}$.

$$\begin{aligned}
-\frac{q_0 \xi^2 L^2}{6EI} + C_{2,3} L + C_{2,4} &= 0 \implies \\
\implies -\frac{q_0 \xi^2 L^2}{6EI} + C_{2,3} L + \frac{q_0 \xi^4}{24EI} &= 0 \implies \\
\implies C_{2,3} &= -\frac{q_0}{24EI} \left(\frac{\xi^4}{L} + 4L \xi^2 \right) \\
-\frac{q_0 \xi^4}{8EI} + C_{1,3} \xi &= C_{2,3} \xi + C_{2,4} \implies \\
\implies -\frac{q_0 \xi^4}{8EI} + C_{1,3} \xi &= -\frac{q_0}{24EI} \left(\frac{\xi^4}{L} + 4L \xi^2 \right) \xi + \frac{q_0 \xi^4}{24EI} \implies \\
\implies C_{1,3} &= \frac{q_0}{24EI} \left(\xi^3 - \frac{\xi^4}{L} - 4L \xi^2 \right)
\end{aligned}$$

Vemos que nuestros valores de las constantes coinciden con los que aparecen en [8]. Si sustituimos las constantes calculadas en las los desplazamientos de cada parte de la viga llegamos a la solución del problema, que coincide con la que aparece en la bibliografía:

$$u_1(x) = -\frac{q_0}{24EI} \left[x^4 - 4x^3 \xi + \frac{4x^3 \xi^2}{L} + 4Lx^3 \xi^2 + \frac{x \xi^4}{L} - x \xi^3 \right], \quad 0 \leq x \leq \xi \quad (2.64)$$

$$u_2(x) = -\frac{q_0}{24EI} \left[\frac{2x^3 \xi^2}{L} - 6x^2 \xi^2 + 4Lx^3 \xi^2 - \frac{x \xi^4}{L} - \xi^4 \right], \quad \xi \leq x \leq L \quad (2.65)$$

2.5. Resolución numérica: Modelo Euler-Bernoulli

En esta sección emplearemos métodos en diferencias finitas para dar solución a los casos particulares que se han estudiado en este capítulo. Más concretamente, estudiaremos los modelos de flexión pura MOD21 y MOD22 con los datos considerados en los ejemplos 2.1 y 2.2 respectivamente. Sólo se plantearán las discretizaciones para el desplazamiento u_1 , siendo éstas análogas para u_2 .

2.5.1. Resolución numérica MOD21

El modelo de flexión pura MOD21 está determinado por (ver Cuadro (2) MOD21):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 u_1(x_3)}{dx_3^4} = \frac{q_1(x_3)}{EI_2}, \\ u_1(0) = u_1(L) = 0, \\ \frac{d^2 u_1(0)}{dx_3^2} = \frac{d^2 u_1(L)}{dx_3^2} = 0. \end{array} \right. \quad (2.66)$$

En este apartado omitiremos los subíndices de u_1 , q_1 y x_3 y utilizaremos u'''' y u'' para denotar a las derivadas cuarta y segunda de u , respectivamente.

Bajo éstas notaciones, el problema relativo a la flexión de una viga bajo el modelo MOD21 se reescribe como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} u''''(x) = \frac{q(x)}{EI_2}, \\ u(0) = u(L) = 0, \\ u''(0) = u''(L) = 0. \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Comenzamos por discretizar el intervalo $[0, L]$ considerando una partición regular:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = L,$$

siendo:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad 0 \leq i \leq n, \quad h = \frac{L}{n+1}.$$

Nuestras incógnitas serán:

$$u_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde u_i denota la aproximación de $u(x_i)$.

Consideramos los puntos $x_i, 1 \leq i \leq n$, usando la fórmula de diferencias centradas para

aproximar la derivada cuarta [11]:

$$f''''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) + 6f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{h^4} + O(h^2),$$

para cada punto considerado, reemplazando cada término $u(x_i)$ por su correspondiente aproximación u_i , eliminando los términos $O(h^2)$ y sustituyendo en la ecuación diferencial del problema obtenemos las ecuaciones discretizadas para los puntos $x_i, 2 \leq i \leq n - 1$:

$$\frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{h^4} = \frac{q_i}{EI_2}, \quad 2 \leq i \leq n - 1,$$

siendo:

$$q_i = q(x_i).$$

Sin embargo, para $i = 1$ obtenemos la siguiente ecuación discretizada:

$$\frac{u_3 - 4u_2 + 6u_1 - 4u_0 + u_{-1}}{h^4} = \frac{q_0}{EI_2}, \quad (2.68)$$

y, para $i = n$:

$$\frac{u_{n+2} - 4u_{n+1} + 6u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{h^4} = \frac{q_n}{EI_2},$$

Para $i = 0$, empleamos una aproximación centrada hacia la izquierda [11] para aproximar la derivada segunda que, como sabemos, vale 0.

$$0 = u''(0) \approx \frac{u_{-1} - 2u_0 + u_1}{h^2}, \quad (2.69)$$

Si además consideramos que $u(0)$ en lugar de u_0 llegamos a:

$$\frac{u_{-1} + u_1}{h^2} \approx 0, \quad (2.70)$$

De esta forma, partiendo de (2.68) y utilizando (2.70) llegamos a la siguiente ecuación discretizada:

$$\frac{u_3 - 4u_2 + 5u_1}{h^4} = \frac{q_0}{EI_2}.$$

De la misma manera, para $i = n$ llegamos a la siguiente ecuación discretizada:

$$\frac{5u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{h^4} = \frac{q_n}{EI_2},$$

que, junto con las anteriores n ecuaciones constituyen el problema discretizado. Podemos

representar el problema discretizado en notación matricial como sigue:

$$\frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{EI_2} \\ \frac{q_2}{EI_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{q_n}{EI_2} \\ \frac{q_n}{EI_2} \end{bmatrix}$$

Este problema constituye un sistema tridiagonal con un total de $n - 1$ ecuaciones y $n - 1$ incógnitas que se puede resolver mediante cualquiera de los métodos tradicionales. Aplicamos esta discretización a los datos del ejemplo 2.1 en el cual recordamos se obtuvo la siguiente solución analítica:

$$u_1(x_3) = -8 \cdot 10^{-7} x_3^4 + 1,6 \cdot 10^{-5} x_3^3 - 8 \cdot 10^{-4} x_3$$

En la figura 2.5.1 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 1$ donde se obtuvo un error de $2 \cdot 10^{-5}$. Por construcción, nuestro método es de orden dos lo que significa que el error global es proporcional al cuadrado del tamaño del paso. En la figura 2.5.1 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 0,1$, donde se obtuvo un error de $2 \cdot 10^{-7}$. Se ha experimentado una disminución del error en la orden de lo esperado, considerando que nuestro método es de orden 2.

En conclusión, hemos obtenido resultados satisfactorios en la resolución numérica del problema, sirviendo ésta de apoyo a la resolución analítica del apartado anterior.

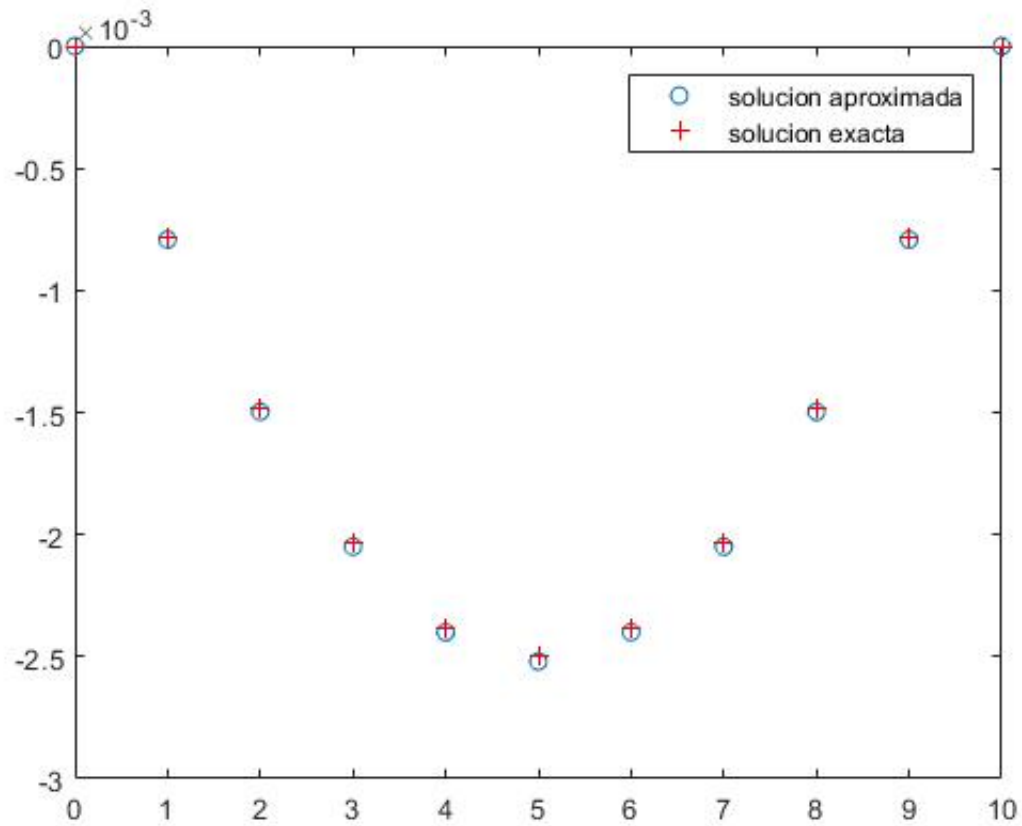


Figura 2.2: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

2.5.2. Resolución numérica MOD22

El modelo de flexión pura MOD22 está determinado por (ver Cuadro (2) MOD21):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 u_1(x_3)}{dx_3^4} = \frac{q_1(x_3)}{EI_2}, \\ u_1(0) = u_1(L) = 0, \\ \frac{du_1(0)}{dx_3} = \frac{du_1(L)}{dx_3} = 0. \end{array} \right. \quad (2.71)$$

En este apartado omitiremos los subíndices de u_1 , q_1 y x_3 y utilizaremos u'''' y u'' para denotar a las derivadas cuarta y segunda de u , respectivamente.

Bajo éstas notaciones, el problema relativo a la flexión de una viga bajo el modelo MOD22

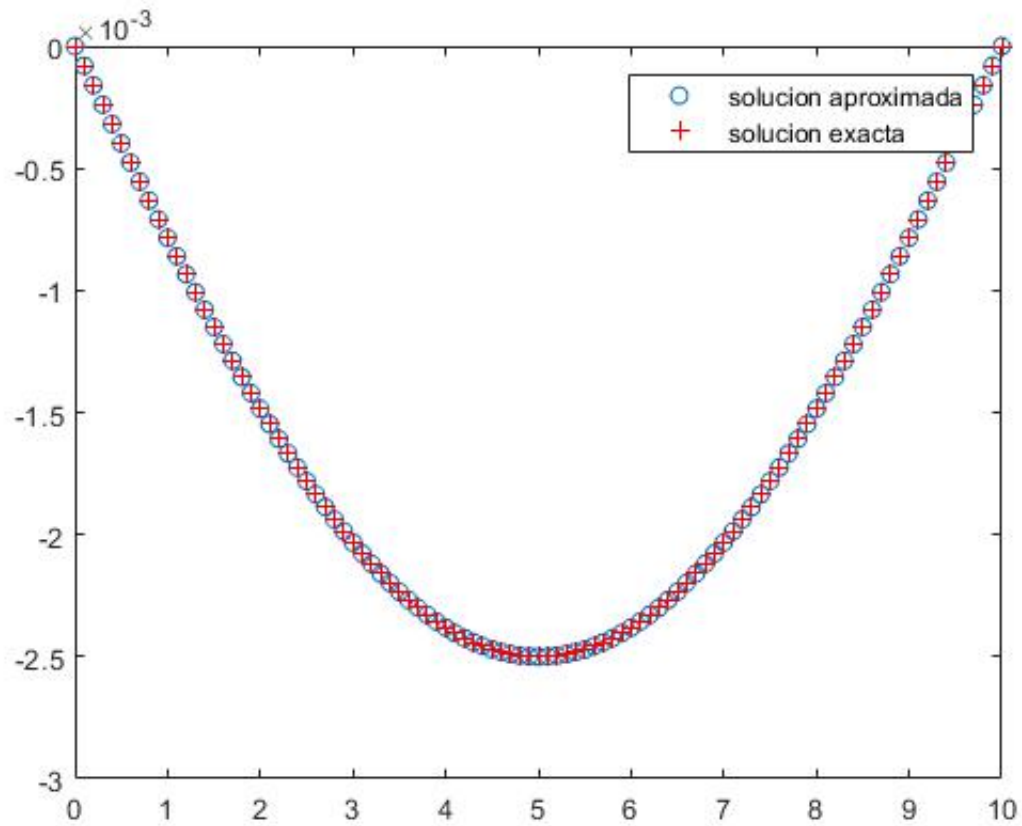


Figura 2.3: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

se reescribe como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} u''''(x) = \frac{q(x)}{EI_2}, \\ u(0) = u(L) = 0, \\ u'(0) = u'(L) = 0. \end{array} \right. \quad (2.72)$$

Comenzamos por discretizar el intervalo $[0, L]$ considerando una partición regular:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = L,$$

siendo:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad 0 \leq i \leq n, \quad h = \frac{L}{n+1}.$$

Nuestras incógnitas serán:

$$u_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde u_i denota la aproximación de $u(x_i)$.

Consideramos los puntos $x_i, 1 \leq i \leq n$, usando la fórmula de diferencias centradas para aproximar la derivada cuarta [11]:

$$f''''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) + 6f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{h^4} + O(h^2),$$

para cada punto considerado, reemplazando cada término $u(x_i)$ por su correspondiente aproximación u_i , eliminando los términos $O(h^2)$ y sustituyendo en la ecuación diferencial del problema obtenemos las ecuaciones discretizadas para los puntos $x_i, 2 \leq i \leq n - 1$:

$$\frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{h^4} = \frac{q_i}{EI_2}, \quad 2 \leq i \leq n - 1,$$

siendo:

$$q_i = q(x_i).$$

Sin embargo, para $i = 1$ obtenemos la siguiente ecuación discretizada:

$$\frac{u_3 - 4u_2 + 6u_1 - 4u_0 + u_{-1}}{h^4} = \frac{q_0}{EI_2}, \quad (2.73)$$

y, para $i = n$:

$$\frac{u_{n+2} - 4u_{n+1} + 6u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{h^4} = \frac{q_n}{EI_2}, \quad (2.74)$$

Para $i = 0$, empleamos una aproximación centrada hacia la izquierda para aproximar la derivada que, como sabemos, vale 0.

$$0 = u'(0) \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2}, \quad (2.75)$$

De esta forma, partiendo de (2.73) y utilizando (2.75) llegamos a la siguiente ecuación discretizada:

$$\frac{u_3 - 4u_2 + 7u_1}{h^4} = \frac{q_0}{EI_2}. \quad (2.76)$$

De la misma manera, para $i = n$ llegamos a la siguiente ecuación discretizada:

$$\frac{7u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{h^4} = \frac{q_n}{EI_2},$$

que, junto con las anteriores n ecuaciones constituyen el problema discretizado. Podemos

representar el problema discretizado en notación matricial como sigue:

$$\frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ . & . & . & . & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & . & . & . & . & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_n \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{EI_2} \\ \frac{q_2}{EI_2} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \frac{q_n}{EI_2} \\ \frac{q_n}{EI_2} \end{bmatrix}$$

Este problema constituye un sistema tridiagonal con un total de $n - 1$ ecuaciones y $n - 1$ incógnitas que se puede resolver mediante cualquiera de los métodos tradicionales. Aplicamos esta discretización a los datos del ejemplo 2.1 en el cual recordamos se obtuvo la siguiente solución analítica:

$$u_1(x_3) = -1,07 \cdot 10^{-5}x_3^6 + 3,2 \cdot 10^{-4}x_3^5 - 4 \cdot 10^{-3}x_3^4 + 2,67 \cdot 10^{-2}x_3^3 - 8 \cdot 10^{-2}x_3^2.$$

En la figura 2.5.2 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 1$ donde se obtuvo un error de 0,0384. En la figura 2.5.2 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 0,1$ donde se obtuvo un error de 0,00086. Se ha experimentado una disminución del error en la orden de lo esperado considerando que nuestro método es de orden 2.

En conclusión, hemos obtenido resultados satisfactorios en la resolución numérica del problema, sirviendo ésta de apoyo a la resolución analítica hallada en el apartado anterior.

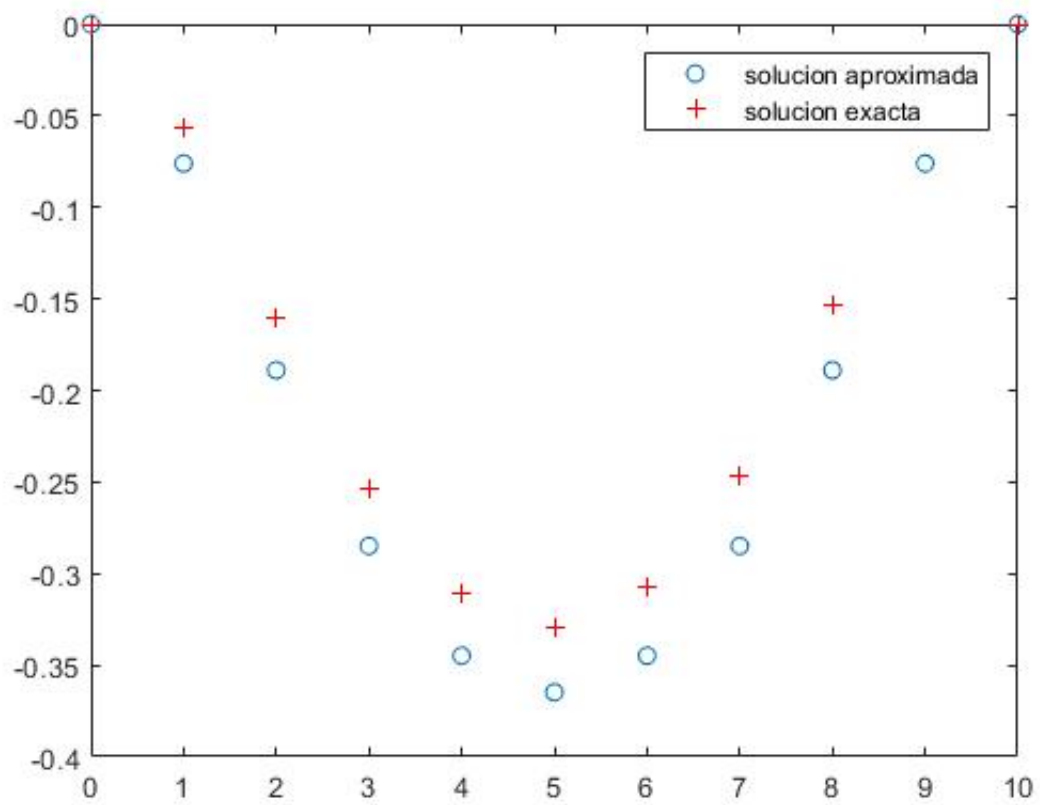


Figura 2.4: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

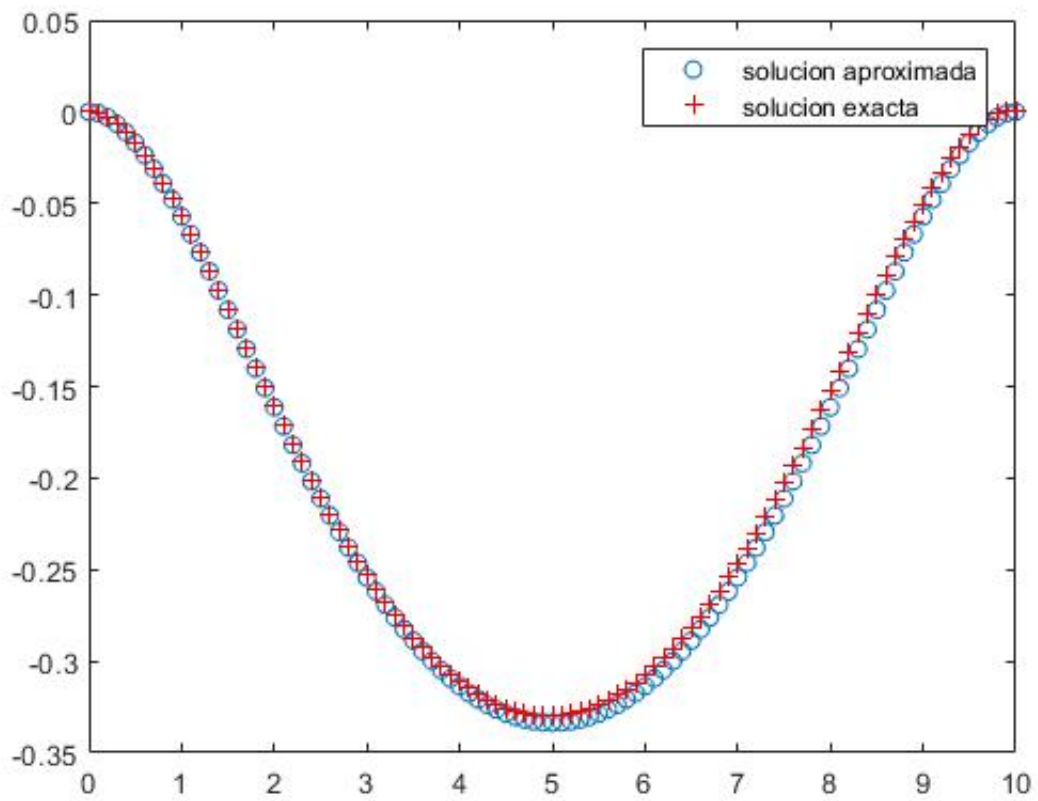


Figura 2.5: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

Capítulo 3

Modelo de viga sometida a flexión pura: Teoría de Timoshenko

3.1. El modelo de viga sometida a flexión pura: Teoría de Timoshenko

El modelo que propone Timoshenko tiene su base en las hipótesis que se consideraban en la teoría de Euler-Bernoulli, pero con las siguientes hipótesis adicionales:

- Se supone la presencia de un estado de tensiones cortantes en la sección de la viga.
- La rotación flexional se considera como una variable independiente no asociada con los desplazamientos flexionales.

La teoría de Timoshenko es más acertada que la teoría de Euler-Bernoulli cuando consideramos una viga tal que la razón entre su longitud y el área de su sección comienza a ser más pequeña. El detalle de la modelización indicada a continuación puede encontrarse en [5].

De acuerdo con las hipótesis:

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = (u_1(x_3), u_2(x_3), -x_1\theta_2(x_3) + x_2\theta_1(x_3)) \quad (3.1)$$

$$\beta_2 = -\theta_1(x_3) = \frac{du_2}{dx_3} - \gamma_2 \quad (3.2)$$

$$\beta_1 = -\theta_2(x_3) = \frac{du_1}{dx_3} - \gamma_1 \quad (3.3)$$

Definimos los esfuerzos de corte como:

$$Q_1(x_3) = GAk \left(\frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right)$$

$$Q_2(x_3) = GAk \left(\frac{du_2(x_3)}{dx_3} - \theta_1(x_3) \right)$$

siendo G el módulo de cortadura del material y k el coeficiente de corte de Timoshenko, que depende de la geometría de la sección transversal.

Bajo las hipótesis, el momento torsor es nulo, al contrario que los momentos flectores los cuales vienen dados por:

$$M_2(x) = EI_2 \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3}$$

$$M_1(x) = EI_1 \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3}$$

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio, que podemos consultar en la bibliografía, son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_2}{dx_3} + Q_1(x_3) = 0 \\ \frac{dM_1}{dx_3} - Q_2(x_3) = 0 \\ \frac{dQ_1}{dx_3} + q_1(x_3) = 0 \\ \frac{dQ_2}{dx_3} + Q_2(x_3) = 0 \end{array} \right.$$

que expresadas en términos de la rotación y del desplazamiento constituyen el modelo de Timoshenko:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_2 \frac{d^2\theta_2(x_3)}{dx_3^2} + GAk \left(\frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) = 0 \\ EI_1 \frac{d^2\theta_1(x_3)}{dx_3^2} - GAk \left(\frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right) = 0 \\ GAk \left(\frac{d^2u_1(x_3)}{dx_3^2} - \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \right) + q_1(x_3) = 0 \\ GAk \left(\frac{d^2u_2(x_3)}{dx_3^2} + \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) + q_2(x_3) = 0 \end{array} \right.$$

Igual que ocurría en los dos anteriores capítulos, el modelo resulta incompleto sino consideramos alguna de las condiciones de contorno que, en este caso, aparecen recogidas en el Cuadro (3.1).

Condición extremo viga	Identificación	Fórmula Matemática
Dirichlet/Borde fijo	Desplazamiento nulo y Rotación nula	$u_1 = 0, u_2 = 0$ y $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$
Libre de fuerzas	Momento flector nulo y Esfuerzo cortante nulo	$\frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} = 0, \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} = 0$ y $\frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) = 0,$ $\frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) = 0,$
Extremo articulado	Desplazamiento nulo y Momento nulo	$u_1 = 0, u_2 = 0$ y $\frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} = 0, \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} = 0.$

Cuadro 3.1: Condiciones de contorno para el modelo de Timoshenko.

3.2. Solución general: Modelo de Timoshenko

Vimos que el modelo de Timoshenko viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_2 \frac{d^2\theta_2(x_3)}{dx_3^2} + GAk \left(\frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) = 0 \\ EI_1 \frac{d^2\theta_1(x_3)}{dx_3^2} - GAk \left(\frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right) = 0 \\ GAk \left(\frac{d^2u_1(x_3)}{dx_3^2} - \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \right) + q_1(x_3) = 0 \\ GAk \left(\frac{d^2u_2(x_3)}{dx_3^2} + \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) + q_2(x_3) = 0 \end{array} \right.$$

Viendo el modelo se observa que la primera y la tercera ecuación constituyen un problema independiente del que forman las otras dos ecuaciones.

Vamos a encontrar expresiones para la componente u_1 del desplazamiento y para la rotación θ_2 a partir de las ecuaciones primera y tercera. Las otras componentes se deducen de las misma forma a partir de las otras dos ecuaciones dando lugar a expresiones análogas a las que vamos a calcular. Entonces nuestro problema se reduce a encontrar u_1 y θ_2 tales

que:

$$\begin{cases} EI_2 \frac{d^2\theta_2(x_3)}{dx_3^2} + GAk \left(\frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) = 0 \\ GAk \left(\frac{d^2u_1(x_3)}{dx_3^2} - \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \right) + q_1(x_3) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

La idea para obtener el resultado es restar a la primera de las expresiones la resultante de derivar la primera expresión de (3.4)¹. Dicho esto, partimos de la siguiente expresión:

$$EI_2 \frac{d^2\theta_2(x_3)}{dx_3^2} + GAk \left(\frac{du_1(x_3)}{dx_3} - \theta_2(x_3) \right) = 0. \quad (3.5)$$

Derivando llegamos a:

$$EI_2 \frac{d^3\theta_2(x_3)}{dx_3^3} + GAk \left(\frac{d^2u_1(x_3)}{dx_3^2} - \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Si ahora efectuamos la resta entre (3.6) y la segunda expresión de (3.4) llegamos a una ecuación diferencial de la rotación θ_2 fácilmente resoluble:

$$\begin{aligned} EI_2 \frac{d^3\theta_2(x_3)}{dx_3^3} + GAk \left(\frac{d^2u_1(x_3)}{dx_3^2} - \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \right) &= 0 \\ - \left(q_1(x_3) + GAk \left(\frac{d^2u_1(x_3)}{dx_3^2} - \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} \right) \right) &= 0 \\ \hline EI_2 \frac{d^3\theta_2(x_3)}{dx_3^3} - q_1(x_3) &= 0 \end{aligned}$$

Integrando consecutivamente la *EDO* resultante llegamos a la expresión general de la rotación θ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^3\theta_2(x_3)}{d(x_3)^3} &= \frac{q_1(x_3)}{EI_2}, \\ \frac{d^2\theta_2(x_3)}{d(x_3)^2} &= \frac{1}{EI_2} \int q_1(x_3) dx_3 + C_{1,1}, \\ \frac{d\theta_2(x_3)}{d(x_3)} &= \frac{1}{EI_2} \int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 + C_{1,1}x_3 + C_{1,2}, \\ \theta_2(x_3) &= \frac{1}{EI_2} \int \left(\int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 + \frac{C_{1,1}}{2} x_3^2 + C_{1,2}x_3 + C_{1,3}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹Al seguir este procedimiento y derivar la primera expresión de (3.4) es probable que se estén introduciendo posibles soluciones que en realidad no lo son. Trataremos de solucionar este problema más adelante.

Podemos reescribir θ_2 en términos de la función m como sigue:

$$\theta_2(x_3) = \frac{1}{EI_2} m_{1,3}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{2} x_3^2 + C_{1,2} x_3 + C_{1,3}. \quad (3.8)$$

Hemos obtenido la segunda componente de la rotación, ya sólo nos falta hallar el desplazamiento u_1 . De (3.5) se deduce:

$$\frac{du_1(x_3)}{dx_3} = \theta_2(x_3) - \frac{EI_2}{GAk} \frac{d^2\theta_2(x_3)}{dx_3^2}. \quad (3.9)$$

Integrando a ambos lados de la expresión llegamos a:

$$u_1(x_3) = \int \theta_2(x_3) dx_3 - \frac{EI_2}{GAk} \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + C_{1,5}, \quad (3.10)$$

con $C_{1,5} \in \mathbb{R}$. Tenemos que determinar la integral y la derivada de la rotación para dar con la expresión final del desplazamiento. Para ello bastará con integrar y derivar con respecto a x_3 la expresión (3.8). De esta manera,

$$\int \theta_2(x_3) dx_3 = \frac{1}{EI_2} \int \left(\int \left(\int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 + \frac{C_{1,1}}{6} x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2} x_3^2 + C_{1,3} x_3 + C_{1,4}.$$

$$\frac{d\theta_2(x_3)}{d(x_3)} = \frac{1}{EI_2} \int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 + C_{1,1} x_3 + C_{1,2}.$$

Vamos a reescribir las expresiones anteriores en términos de la función m . De esta manera:

$$\int \theta_2(x_3) dx_3 = \frac{1}{EI_2} m_{1,4}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{6} x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2} x_3^2 + C_{1,3} x_3 + C_{1,4}.$$

$$\frac{d\theta_2(x_3)}{d(x_3)} = \frac{1}{EI_2} m_{1,2}(x_3) + C_{1,1} x_3 + C_{1,2}.$$

Sustituyendo éstas expresiones en (3.10) llegamos al resultado buscado:

$$u_1(x_3) = \int \theta_2(x_3) dx_3 - \frac{EI_2}{GAk} \frac{d\theta_2(x_3)}{dx_3} + C_{1,5} \quad (3.11)$$

$$= \frac{m_{1,4}(x_3)}{EI_2} + \frac{C_{1,1}}{6} x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2} x_3^2 + C_{1,3} x_3 + C_{1,4} - \frac{EI_2}{GAk} \left(\frac{m_{1,2}(x_3)}{EI_2} + C_{1,1} x_3 + C_{1,2} \right) + C_{1,5} \quad (3.12)$$

$$= \frac{m_{1,4}(x_3)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(x_3)}{GAk} + \frac{C_{1,1}}{6} x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2} x_3^2 + \left(C_{1,3} - \frac{EI_2}{GAk} C_{1,1} \right) x_3 + C_{1,4} - \frac{C_{1,2} EI_2}{GAk} + C_{1,5}, \quad (3.13)$$

con $C_{\alpha,j} \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$; constantes de integración reales.

De ahora en adelante vamos a considerar el término independiente de (3.13) como una nueva constante. Podemos hacer esto porque la forma del mismo carece de interés para

nuestro estudio ya que solo nos interesa el valor que éste pueda tomar en cada caso. Así, podemos renombrar el término independiente de (3.13):

$$C_{1,4} - \frac{C_{1,2}EI_2}{GAk} + C_{1,5} = C_{1,6}. \quad (3.14)$$

Ya que la constante $C_{1,4}$ acaba de desaparecer de las soluciones del modelo, podemos reutilizarla para renombrar (3.14) de nuevo. Con estos cambios, la ecuación (3.13) pasa a ser de la forma:

$$u_1(x_3) = \frac{m_{1,4}(x_3)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(x_3)}{GAk} + \frac{C_{1,1}}{6}x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2}x_3^2 + \left(C_{1,3} - \frac{EI_2}{GAk}C_{1,1}\right)x_3 + C_{1,4}. \quad (3.15)$$

Y, como ya vimos, la rotación θ_2 es:

$$\theta_2(x_3) = \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{2}x_3^2 + C_{1,2}x_3 + C_{1,3}. \quad (3.16)$$

Ahora, consideramos las otras dos ecuaciones del problema:

$$\begin{cases} EI_1 \frac{d^2\theta_1(x_3)}{dx_3^2} - GAk \left(\frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \theta_1(x_3) \right) = 0 \\ GAk \left(\frac{d^2u_2(x_3)}{dx_3^2} + \frac{d\theta_1(x_3)}{dx_3} \right) + q_2(x_3) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Mediante un procedimiento análogo al empleado en el anterior sistema, llegamos a las siguientes expresiones para u_2 y θ_1 :

$$\theta_1(x_3) = -\frac{1}{EI_1}m_{2,3}(x_3) + \frac{C_{2,1}}{2}x_3^2 + C_{2,2}x_3 + C_{2,3}. \quad (3.18)$$

$$u_2(x_3) = \frac{m_{2,4}(x_3)}{EI_1} - \frac{m_{2,2}(x_3)}{GAk} - \frac{C_{2,1}}{6}x_3^3 - \frac{C_{2,2}}{2}x_3^2 + \left(\frac{EI_1}{GAk}C_{2,1} - C_{2,3}\right)x_3 + C_{2,4} \quad (3.19)$$

Como ocurrió en los modelos anteriores, las soluciones que aportamos quedan en función de constantes de integración. En el modelo de Timoshenko vamos a considerar el modelo de flexión pura MOD31, recogido en el Cuadro (3.2)

Modelo	Condición extremo viga	Identificación	Fórmula Matemática
MOD31	Dirichlet/Borde fijo	Desplazamiento nulo	$u_1 = 0, u_2 = 0$
		y	y
		Rotación nula	$\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$

Cuadro 3.2: Condiciones de contorno para el modelo de Timoshenko.

3.3. Solución particular MOD31

Estudiaremos el caso particular de una viga con condiciones de tipo Dirichlet. Estas condiciones se identifican con una rotación y un desplazamiento nulos en los extremos de la viga, que se traducen a las siguientes condiciones de contorno (ver Cuadro (3.2), modelo MOD31):

$$\begin{aligned} u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_1(L) = 0, \quad u_2(L) = 0, \\ \theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = 0, \quad \theta_1(L) = 0, \quad \theta_2(L) = 0 \end{aligned}$$

Nosotros en este apartado solo vamos a calcular las expresiones de u_1 y θ_2 ya que u_2 y θ_1 se obtendrían mediante un proceso análogo. Por lo tanto, partiremos de las siguientes condiciones de contorno:

$$u_1(0) = 0, \quad (3.20)$$

$$u_1(L) = 0, \quad (3.21)$$

$$\theta_2(0) = 0, \quad (3.22)$$

$$\theta_2(L) = 0. \quad (3.23)$$

Recordamos las expresiones generales de u_1 y θ_2 que fueron halladas en el apartado anterior:

$$u_1(x_3) = \frac{m_{1,4}(x_3)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(x_3)}{GAk} + \frac{C_{1,1}}{6}x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2}x_3^2 + \left(C_{1,3} - \frac{EI_2}{GAk}C_{1,1}\right)x_3 + C_{1,4}, \quad (3.24)$$

$$\theta_2(x_3) = \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{2}x_3^2 + C_{1,2}x_3 + C_{1,3}. \quad (3.25)$$

Siendo:

$$m_{1,4}(x_3) = \int \left(\int \left(\int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3.$$

Por un lado, evaluando u_1 en $x_3 = 0$ la ecuación (3.24), e igualando a 0 como nos dicta la condición de contorno (3.20), tenemos:

$$u_1(0) = \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} + C_{1,4} = 0.$$

Por tanto,

$$C_{1,4} = \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2}.$$

Por otro lado, evaluando θ_2 en $x_3 = 0$ la ecuación (3.25), e igualando a 0 como nos dicta la condición de contorno (3.22), tenemos:

$$\theta_2(0) = \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(0) + C_{1,3} = 0. \quad (3.26)$$

Por tanto,

$$C_{1,3} = -\frac{m_{1,3}(0)}{EI_2}$$

Sustituyendo los valores de $C_{1,3}$ y $C_{1,4}$ calculados en (3.24) y (3.25) llegamos a las siguientes expresiones:

$$u_1(x_3) = \frac{m_{1,4}(x_3)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(x_3)}{GAk} + \frac{C_{1,1}}{6}x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2}x_3^2 + \left(-\frac{m_{1,3}(0)}{EI_2} - \frac{EI_2}{GAk}C_{1,1}\right)x_3 + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2}, \quad (3.27)$$

$$\theta_2(x_3) = \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{2}x_3^2 + C_{1,2}x_3 - \frac{m_{1,3}(0)}{EI_2}. \quad (3.28)$$

Por un lado, partiendo de la condición (3.21) y utilizando (3.27) llegamos a:

$$u_1(L) = \frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} + \frac{C_{1,1}}{6}L^3 + \frac{C_{1,2}}{2}L^2 + \left(-\frac{m_{1,3}(0)}{EI_2} - \frac{EI_2}{GAk}C_{1,1}\right)L + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} = 0,$$

o, equivalentemente:

$$\left(\frac{L^3}{6} - \frac{EI_2L}{GAk}\right)C_{1,1} + \frac{L^2}{2}C_{1,2} + \frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} - \frac{m_{1,3}(0)L}{EI_2} + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} = 0. \quad (3.29)$$

Por otro lado, partiendo de la condición (3.23) y utilizando (3.28) llegamos a:

$$\theta_2(L) = \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(L) + \frac{C_{1,1}}{2}L^2 + C_{1,2}L - \frac{m_{1,3}(0)}{EI_2} = 0. \quad (3.30)$$

Las expresiones (3.29) y (3.30) constituyen un sistema de dos ecuaciones con $C_{1,1}$ y $C_{1,2}$ como incógnitas.

$$\begin{cases} \left(\frac{L^3}{6} - \frac{EI_2L}{GAk}\right)C_{1,1} + \frac{L^2}{2}C_{1,2} + \frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} - \frac{m_{1,3}(0)L}{EI_2} + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} = 0, \\ \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(L) + \frac{C_{1,1}}{2}L^2 + C_{1,2}L - \frac{m_{1,3}(0)}{EI_2} = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Empezamos por multiplicar (3.30) por $L/2$ y obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{L^3}{4}C_{1,1} + \frac{L^2}{2}C_{1,2} + \frac{m_{1,3}(L)L}{2EI_2} - \frac{m_{1,3}(0)L}{2EI_2} = 0.$$

Ahora restamos esta expresión y (3.29):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{L^3}{6} - \frac{EI_2L}{GAk}\right)C_{1,1} + \frac{L^2}{2}C_{1,2} + \frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} - \frac{m_{1,3}(0)L}{EI_2} + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} = 0 \\ &\quad - \left(\frac{L^3}{4}C_{1,1} + \frac{L^2}{2}C_{1,2} + \frac{m_{1,3}(L)L}{2EI_2} - \frac{m_{1,3}(0)L}{2EI_2} = 0\right) \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{L^3}{12} - \frac{EI_2L}{GAk}\right)C_{1,1} + \frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} - \frac{m_{1,3}(L)L}{2EI_2} - \frac{m_{1,3}(0)L}{2EI_2} = 0$$

De donde se deduce:

$$C_{1,1} = \frac{1}{\left(\frac{L^3}{12} + \frac{EI_2L}{GAk}\right)} \left[\frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} - \frac{m_{1,3}(L)L}{2EI_2} - \frac{m_{1,3}(0)L}{2EI_2} \right]$$

Ahora de (3.29), es inmediato obtener $C_{1,2}$:

$$C_{1,2} = \frac{m_{1,3}(0)}{LEI} - \frac{m_{1,3}(L)}{LEI} - \frac{L^2}{2}C_{1,1}.$$

Para obtener la expresión final bastaría con sustituir el valor de $C_{1,1}$ que acabamos de calcular, aunque nosotros vamos a omitirlo debido a la elevada dimensión de la expresión resultante. Con esto, ya hemos obtenido el valor de todas las constantes involucradas en el desplazamiento u_1 en el modelo de flexión pura MOD31.

$$C_{1,1} = \frac{1}{\left(\frac{L^3}{12} + \frac{EI_2L}{GAk}\right)} \left[\frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} - \frac{m_{1,3}(L)L}{2EI_2} - \frac{m_{1,3}(0)L}{2EI_2} \right].$$

$$C_{1,2} = \frac{m_{1,3}(0)}{LEI} - \frac{m_{1,3}(L)}{LEI} - \frac{L^2}{2}C_{1,1},$$

$$C_{1,3} = -\frac{m_{1,3}(0)}{EI_2},$$

$$C_{1,4} = \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2}.$$

Veremos como aplicar estos resultados a un caso práctico en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1. Consideramos una viga de aluminio de longitud $L = 1$ metro con sección circular de radio 0,2 metros. El módulo de Young es $E = 7 \cdot 10^{10} Pa$ y el modulo de cortadura es $G = 2,6 \cdot 10^{10} Pa$. Dicha viga está empotrada en ambos extremos. La carga por unidad de superficie a la que está sometida la viga es:

$$\vec{q} = (2x_3 - 1, 0, 0).$$

Integrando un total de cuatro veces la primera componente de la carga obtenemos la función $m_{1,4}$ (correspondiente:

$$m_{1,4}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s \left(\int_0^t \left(\int_0^u q_1(l) dl \right) du \right) dt \right) ds = \frac{x_3^5}{60} - \frac{x_3^4}{24}. \quad (3.32)$$

Para hallar el desplazamiento u_1 y la rotación θ_2 utilizaremos las expresiones (3.24) y (3.25) además de las expresiones que también calculamos para las constantes involucradas. Para lo que necesitaremos las expresiones de $m_{1,3}$ (, $m_{1,2}$ (y $m_{1,1}$ (. Éstas vienen dadas por:

$$m_{1,3}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s \left(\int_0^t q_1(u) du \right) dt \right) ds = \frac{x_3^4}{12} - \frac{x_3^3}{6},$$

$$m_{1,2}(x_3) = \int_0^{x_3} \left(\int_0^s q_1(t) dt \right) ds = \frac{x_3^3}{3} - \frac{x_3^2}{2},$$

$$m_{1,1}(x_3) = \int_0^{x_3} q_1(d) ds = x_3^2 - x_3.$$

Las constantes que necesitamos para definir el desplazamiento y la rotación vienen dadas en función de las evaluaciones en $x_3 = 0$ y en $x_3 = L$, en este caso $L = 1$, de las anteriores expresiones. Así, tenemos:

$$m_{1,2}(0) = m_{1,3}(0) = m_{1,4}(0) = 0$$

$$m_{1,4}(1) = -\frac{1}{40}$$

$$m_{1,3}(1) = -\frac{1}{12}$$

$$m_{1,2}(1) = -\frac{1}{6}$$

Así, las constantes $C_{i,j}$ son:

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= \frac{1}{\left(\frac{L^3}{12} + \frac{EI_2 L}{GAk}\right)} \left[\frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} - \frac{m_{1,3}(L)L}{2EI_2} - \frac{m_{1,3}(0)L}{2EI_2} \right] \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{12} + \frac{EI_2}{GAk}\right)} \left[-\frac{1}{40EI_2} + \frac{1}{60GAk} + \frac{1}{24EI_2} \right] \\ &= 2,1678 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= \frac{m_{1,3}(0)}{LEI} - \frac{m_{1,3}(L)}{LEI} - \frac{L^2}{2} C_{1,1} \\ &= -\frac{1}{12EI_2} - \frac{1}{2} \cdot 2,1678 \cdot 10^{-9} \\ &= -1,3654 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,3} &= -\frac{m_{1,3}(0)}{EI_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,4} &= \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (3.25) y (3.24) obtenemos el desplazamiento u_1 y la rotación

θ_2 :

$$\begin{aligned} u_1(x_3) &= \frac{m_{1,4}(x_3)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(x_3)}{GAk} + \frac{C_{1,1}}{6}x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2}x_3^2 + \left(C_{1,3} - \frac{EI_2}{GAk}C_{1,1}\right)x_3 + C_{1,4} \\ &= \frac{1}{EI_2} \left(\frac{x_3^5}{60} - \frac{x_3^4}{24}\right) - \frac{1}{GAk} \left(\frac{x_3^4}{12} - \frac{x_3^3}{6}\right) - 6,8270 \cdot 10^{-11}x_3^2 - 7,0036 \cdot 10^{-11}x_3 \\ &= 1,8947 \cdot 10^{-10}x_3^5 - 5,0428 \cdot 10^{-10} + 6,1213 \cdot 10^{-11}x_3^3 - 6,8270 \cdot 10^{-11}x_3^2 - 7,0036 \cdot 10^{-11}x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2(x_3) &= \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{2}x_3^2 + C_{1,2}x_3 + C_{1,3} \\ &= \frac{1}{EI_2} \left(\frac{x_3^4}{12} - \frac{x_3^3}{6}\right) + 1,0839 \cdot 10^{-9}x_3^2 - 1,3654 \cdot 10^{-10}x_3 \\ &= 9,4735 \cdot 10^{-10}x_3^4 - 1,8947 \cdot 10^{-9}x_3^3 + 1,0839 \cdot 10^{-9}x_3^2 - 1,3654 \cdot 10^{-10}x_3 \end{aligned}$$

3.4. Identificación con benchmark

En esta sección aplicaremos nuestro resultado para el caso propuesto por Peregrina Quintela en [5]. En este documento se estudia el caso de una viga de aluminio de longitud $L = 1$ metro y sección circular de radio 0,01 metros que está empotrada en los dos extremos y está sometida a una carga por unidad de longitud $\vec{q} = qe_1 N/m^2$. El módulo de Young del aluminio es $E = 7 \cdot 10^{10} Pa$ y el módulo de cortadura es $G = 2,6 \cdot 10 Pa$.

Partimos entonces de la carga por unidad de longitud:

$$\vec{q} = qe_1,$$

cuya función $m_{1,4}$ asociada es:

$$m_{1,4}(x_3) = \int \left(\int \left(\int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 = \frac{qx_3^4}{24}.$$

Para hallar el desplazamiento u_1 y la rotación θ_2 necesitaremos las expresiones de $m_{1,3}$, $m_{1,2}$ y $m_{1,1}$. Éstas vienen dadas por:

$$m_{1,3}(x_3) = \int \left(\int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 \right) dx_3 = \frac{qx_3^3}{6}.$$

$$m_{1,2}(x_3) = \int \left(\int q_1(x_3) dx_3 \right) dx_3 = \frac{qx_3^2}{2}.$$

$$m_{1,1}(x_3) = \int q_1(x_3) dx_3 = qx_3.$$

Las constantes que necesitamos para definir el desplazamiento y la rotación vienen dadas en función de las evaluaciones en $x_3 = 0$ y en $x_3 = L$, en este caso $L = 1$, de las anteriores expresiones. Así, tenemos:

$$m_{1,2}(0) = m_{1,3}(0) = m_{1,4}(0) = 0$$

$$m_{1,4}(1) = \frac{q}{24}$$

$$m_{1,3}(1) = \frac{q}{6}$$

$$m_{1,2}(1) = \frac{q}{2}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones que hallamos en la sección anterior para las constantes de integración obtenemos el valor que éstas toman en nuestro caso:

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= \frac{1}{\left(\frac{L^3}{12} + \frac{EI_2 L}{GAk}\right)} \left[\frac{m_{1,4}(L)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(L)}{GAk} + \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} - \frac{m_{1,3}(L)L}{2EI_2} - \frac{m_{1,3}(0)L}{2EI_2} \right] \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{12} + \frac{EI_2}{GAk}\right)} \left[\frac{q}{24EI_2} - \frac{q}{2GAk} - \frac{q}{12EI_2} \right] \\ &= \frac{12GAk}{GAk + 12EI_2} \left[\frac{-qGAk - q12EI_2}{24EI_2GAk} \right] \\ &= \frac{-q(GAk + 12EI_2)}{(GAk + 12EI_2)2EI_2} \\ &= -\frac{q}{2EI_2} \\ C_{1,2} &= \frac{m_{1,3}(0)}{LEI} - \frac{m_{1,3}(L)}{LEI} - \frac{L^2}{2}C_{1,1} \\ &= -\frac{-q}{6EI} + \frac{q}{4EI_2} \\ &= \frac{q}{12EI_2} \\ C_{1,3} &= -\frac{m_{1,3}(0)}{EI_2} \\ &= 0 \\ C_{1,4} &= \frac{m_{1,2}(0)}{GAk} - \frac{m_{1,4}(0)}{EI_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (3.24) y en (3.25) llegamos al resultado buscado. De esta forma:

$$\begin{aligned}
 u_1(x_3) &= \frac{m_{1,4}(x_3)}{EI_2} - \frac{m_{1,2}(x_3)}{GAk} + \frac{C_{1,1}}{6}x_3^3 + \frac{C_{1,2}}{2}x_3^2 + \left(C_{1,3} - \frac{EI_2}{GAk}C_{1,1} \right) x_3 + C_{1,4} \\
 &= \frac{qx_3^4}{24EI_2} - \frac{qx_3^2}{2GAk} - \frac{q}{12EI_2}x_3^3 + \frac{q}{24EI_2}x_3^2 + \left(\frac{EI_2}{GAk} \cdot \frac{q}{2EI_2} \right) x_3 \\
 &= \frac{q}{24EI_2} (x_3^4 - 2x_3^3 + x_3^2) + \frac{q}{2GAk}(-x^2 + x) \\
 &= \frac{q}{24EI_2} (1 - x_3)^2 x_3^2 + \frac{q}{2GAk} (1 - x_3) x_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_2(x_3) &= \frac{1}{EI_2}m_{1,3}(x_3) + \frac{C_{1,1}}{2}x_3^2 + C_{1,2}x_3 + C_{1,3} \\
 &= \frac{qx_3^3}{6EI_2} - \frac{q}{4EI_2}x_3^2 + \frac{q}{12EI_2}x_3 \\
 &= \frac{q}{12EI_2} (x_3 - 3x_3^2 + 2x_3^3).
 \end{aligned}$$

Este resultado coincide con la solución que se propone en [5] para este caso.

3.5. Resolución numérica para problema de flexión pura Teoría de Timoshenko

En este apartado trataremos de encontrar una solución numérica para el ejemplo 3.1 basada en el método de diferencias finitas. Para ilustrar la deducción del método, se planteará para el modelo de flexión pura MOD31 y se implementará en Matlab un programa basado en dicho método con los datos del ejemplo 3.1.

De la misma manera que en el caso analítico, se planteará la resolución numérica para el desplazamiento u_1 y la rotación θ_2 , ya que la resolución de u_2 y θ_1 se obtiene de una forma análoga.

En estas condiciones, pasamos a obtener la discretización del MOD31 (ver Cuadro (3.2)):

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_2\theta_2''(x_3) + GAk (u_1'(x_3) - \theta_2(x_3)) = 0 \\ GAk (u_1''(x_3) - \theta_2''(x_3)) + q_1(x_3) = 0 \\ u_1(0) = \theta_2(0) = 0 \\ u_1(L) = \theta_2(L) = 0 \end{array} \right. \quad (3.33)$$

En lo que resta de apartado, suprimiremos los subíndices de θ_2 , u_1 , q_1 y x_3 para descargar la notación. De esta forma, el problema a discretizar será el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_2 \theta''(x) + GAk (u'(x) - \theta(x)) = 0 \\ GAk (u''(x) - \theta''(x)) + q(x) = 0 \\ u(0) = \theta(0) = 0 \\ u(L) = \theta(L) = 0 \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Comenzamos por discretizar el intervalo $[0, L]$ considerando una partición regular:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = L,$$

siendo:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad 0 \leq i \leq n, \quad h = \frac{L}{n+1}.$$

Usando las fórmulas de diferencias centradas para aproximar las derivadas [11]:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + O(h^2)$$

y

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2), \quad (3.35)$$

reemplazando cada término $\theta(x_i)$ y $u(x_i)$ por sus correspondientes aproximaciones θ_i y u_i , eliminando los términos $O(h^2)$ y sustituyendo en el problema (3.34) obtenemos la versión discreta de problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \theta_0 = 0, \\ \frac{EI_2}{h^2} (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) + GAk \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \theta_i \right) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \\ GAk \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{h^2} - \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} \right) = -q(x_i), \quad 1 \leq i \leq n \\ u_{n+1} = \theta_{n+1} = 0. \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Este problema constituye un sistema tridiagonal con un total de $2n$ ecuaciones y $2n$ incógnitas: $x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_n$. Para una visión más clara podemos escribir el sistema en

3.5. RESOLUCIÓN NUMÉRICA PARA PROBLEMA DE FLEXIÓN PURA TEORÍA DE TIMOSHENKO6

notación matricial tal y como se hace en la implementación. Mostramos a continuación la matriz de diseño del sistema:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & R & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -Q & P & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -R & 0 & R & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & P & -Q & P & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -R & 0 & R & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & P & -Q & P & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -R & 0 & R & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P & -Q & P \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -R & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P & -Q \\ -2S & S & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -R & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ S & -2S & S & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & R & 0 & -R & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & S & -2S & S & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & R & 0 & -R & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S & -2S & S & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & R & 0 & -R \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & S & -2S & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & R & 0 \end{pmatrix},$$

siendo:

$$\begin{aligned} P &= \frac{EI_2}{h^2}, \\ Q &= \frac{2EI_2}{h^2} + GAk, \\ R &= \frac{GAk}{2h}, \\ S &= \frac{2GAk}{h^2}. \end{aligned}$$

Podemos expresar las incógnitas del sistema y el término independiente en forma vectorial como sigue:

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n-1} \\ u_n \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -q_{n-1} \\ -q_n \end{pmatrix},$$

donde se ha introducido la notación:

$$q_i = q(x_i).$$

De esta manera, el sistema escrito en notación matricial es:

$$A_h \cdot u_h = b$$

Aplicamos esta discretización a los datos del ejemplo 3.1, en el cual recordamos se obtuvo la siguiente solución analítica:

$$u_1(x_3) = 1,8947 \cdot 10^{-10} x_3^5 - 5,0428 \cdot 10^{-10} + 6,1213 \cdot 10^{-11} x_3^3 - 6,8270 \cdot 10^{-11} x_3^2 - 7,0036 \cdot 10^{-11} x_3$$

$$\theta_2(x_3) = 9,4735 \cdot 10^{-10} x_3^4 - 1,8947 \cdot 10^{-9} x_3^3 + 1,0839 \cdot 10^{-9} x_3^2 - 1,3654 \cdot 10^{-10} x_3$$

En la figura 3.5 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 0,1$ donde se obtuvo un error de $2 \cdot 10^{-12}$. Por construcción, nuestro método es de orden dos lo que significa que el error global es proporcional al cuadrado del tamaño del paso. En la figura 3.5 se muestra un plot de los valores exactos calculados a partir de la solución analítica frente a los valores aproximados utilizando un paso $h = 0,01$, donde se obtuvo un error de $2,1089 \cdot 10^{-14}$. Se ha experimentado una disminución del error en la orden de lo esperado considerando que

3.5. RESOLUCIÓN NUMÉRICA PARA PROBLEMA DE FLEXIÓN PURA TEORÍA DE TIMOSHENKO6

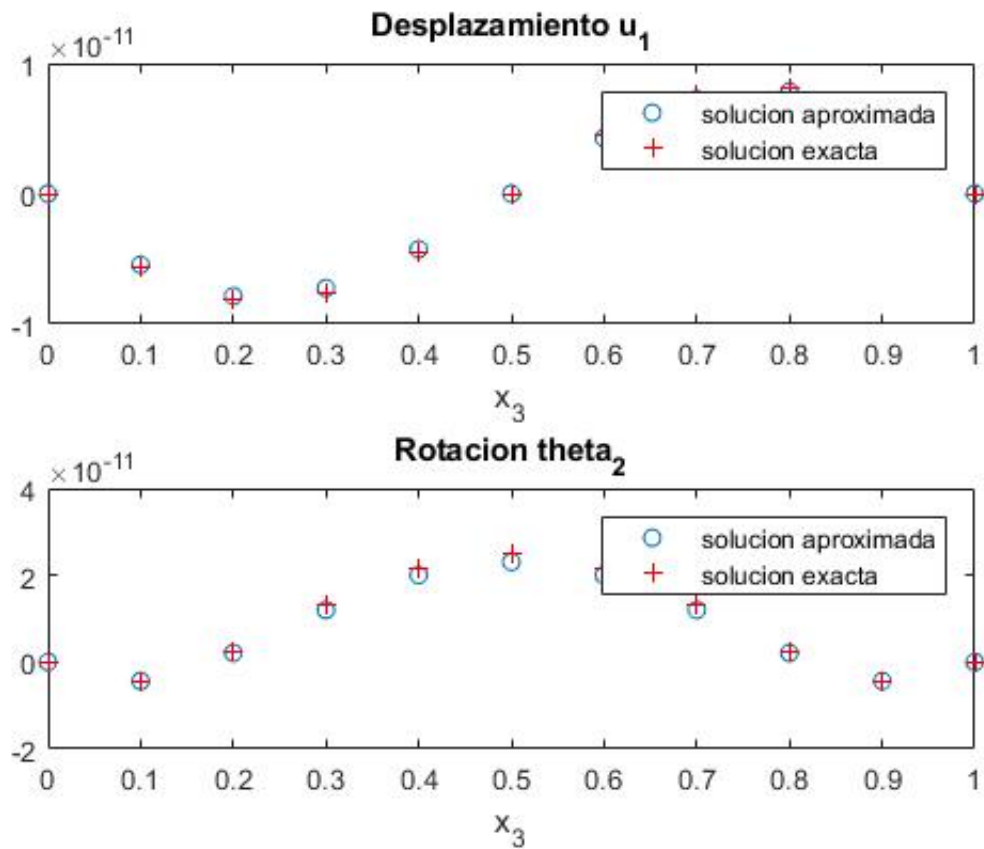


Figura 3.1: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

nuestro método es de orden 2.

En conclusión, hemos obtenido resultados satisfactorios en la resolución numérica del problema, sirviendo ésta de apoyo a la resolución analítica del apartado anterior.

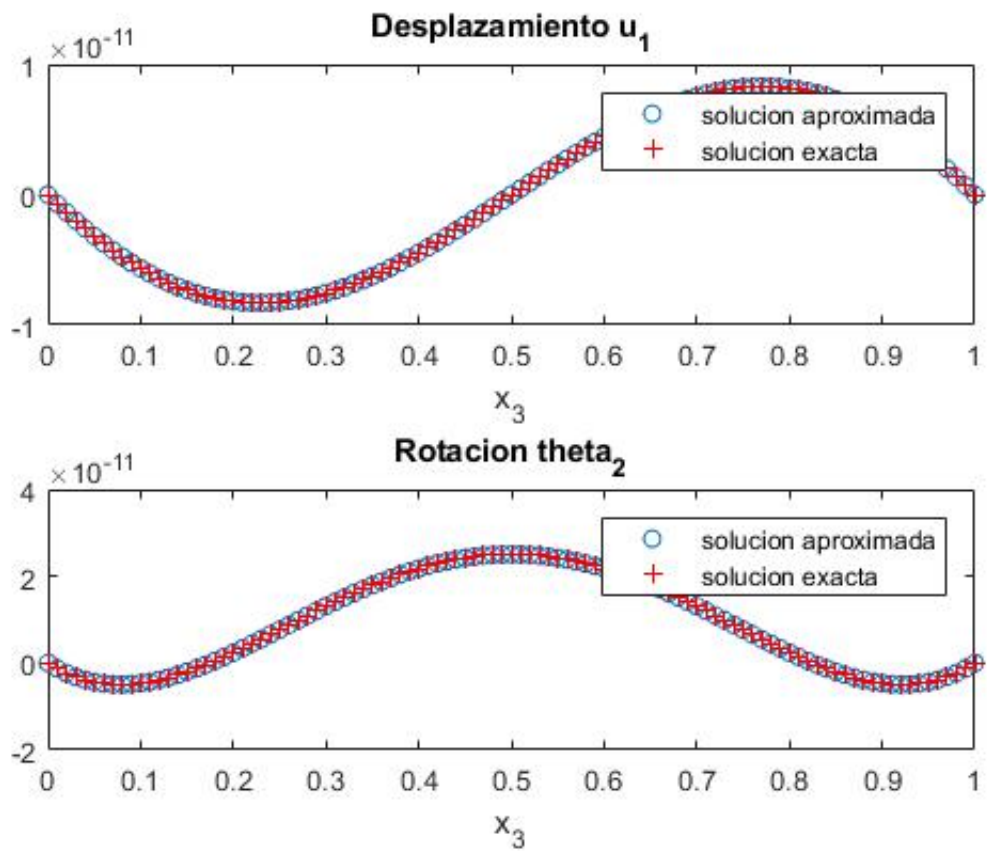


Figura 3.2: Valores exactos frente a valores aproximados en los nodos de la discretización

Bibliografía

- [1] L. H. Donnell, “Beams, plates, and shells,” *New York, McGraw-Hill Book Co., 1976.*, 1976.
- [2] J. Gere and S. Timoshenko, “Mechanics of materials, 1997,” *PWS-KENT Publishing Company, ISBN 0*, vol. 534, no. 92174, p. 4, 1997.
- [3] S. Timoshenko, “Analysis of bi-metal thermostats,” *Josa*, vol. 11, no. 3, pp. 233–255, 1925.
- [4] S. Timoshenko and J. Goodier, “Teoría de la elasticidad. ed. urmo. 1951.[89] tribillo r.; generalization of the mesh meted,” *Zeszyty Naukowe Politechniki Bialostockiej*, 1976.
- [5] P. Q. Estévez, *Métodos matemáticos en mecánica de sólidos*. Universidade de Santiago de Compostela, 1999.
- [6] C. Agelet de Saracibar Bosch and X. O. Olivella, *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Edicions de la UPC, S.L., 2 ed., 2002.
- [7] I. S. Sokolnikoff, *Mathemarical theory of elasticity*. 2 ed., 1946.
- [8] J. R. Vinson, *The behavior of thin walled structures: beams, plates, and shells*, vol. 8. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] D. G. Ibáñez and E. C. Prendes, *Resistencia de materiales para arquitectos*, vol. 273. Prensas de la Universidad de Zaragoza, 2018.
- [10] J. M. Gere, S. Timoshenko, and G. Bugada, *Resistencia de materiales: Timoshenko*. Paraninfo, 2002.
- [11] P. Q. Estévez, *Métodos numéricos en ingeniería*. Tórculo Edicions, 2001.

.1. Programas matlab

.1.1. Modelo de flexión pura

Este apartado recoge todos los programas empleados en el primer capítulo. Gráfica ejemplo 1.1:

```
%desplazamiento
L=10;
x = 0:pi/100:L;
ro = 800;
P=0;
E = 7e+9;
a = (ro*9.8)/(2*(E));
b = (P-(ro*9.8*pi*L/16))/(E*pi/16);
y = a*x.^2+b*x;
%TENSION:
c=ro*9.8*pi/(16*pi/16);
d=(P-(ro*9.8*pi*L)/16)/(pi/16);

sigma=c*x+d;

%plot
u=0*x;
y2= y+x;

subplot(2,1,1);plot(x,u)
axis([0 (L+1) -0.000002 0.000002])
hold on
axis manual
plot(y2,u)
hold off
title('Deformación ')
xlabel('x_{3}')
subplot(2,1,2);plot(x,sigma)
axis([0 L+1 -10e4 0.000002])
title('Tensión axial')
xlabel('x_{3}')
```



```
ylabel('Tensión /n (N/m^2)')
```

Gráfica ejemplo 1.2:

```
%desplazamiento
L=10;
x = 0:pi/100:L;
ro = 800;
P=100;
E = 7e+9;
a = 2.54e-8;
b = 5.1e-7;
f = -1.7e-09;
y = f*x.^3+a*x.^2+b*x-2.5e-6;
%TENSION:
c=L/(pi/16);
d=P/(pi/16);
e=-1/(pi/16);
sigma=e*x.^2+c*x+d;

%plot
u=0*x;
y2= y+x;

subplot(2,1,1);plot(1000000*x,u)
axis([-1 1000000*(L+1) -0.000002 0.000002])
hold on
axis manual
plot(1000000*y2,u)
hold off
title('Desplazamiento axial')
xlabel('x_{3}')
subplot(2,1,2);plot(x,sigma)
axis([0 L+1 500 650])
title('Tensión axial')
xlabel('x_{3}')
ylabel('Tensión /n (N/m^2)')
```

Discretización MOD11

Programa principal:

```
clear all
% entrada de datos
[ndim,a,L,alfa,beta,q,iopsol,solexa,E,A]=datos1;
% construccion del sistema
[x,ah,u1]=sist_df(q,a,L,alfa,beta,ndim,E,A);
% solucion del sistema y calculo de error
[u1,error]=solve_df(ah,u1,x,iopsol,solexa);
% grafica de solucion
plot([a,x],[alfa,u1'],'o') %añadimos a x a y b, lo mismo pa u1
if iopsol==1
hold on;
u1=feval(solexa,x);
plot([a,x,L],[alfa,u1,u1(L)'],'+r')
legend('solucion aproximada','solucion exacta')
hold off
end
```

Fichero entradas de datos:

```
function [ndim,a,L,alfa,beta,q,iopsol,solexa,E,A]=datos1
ndim = 99 ;
a = 0 ;
L = 10 ;
alfa = 0 ; %u(0)
beta = 0 ; %u'(L)
q = @q1 ;
iopsol = 1 ;
solexa = @u1 ;
E = 7e9 ;
A = pi/16;
end

function [x,ah,u1]=sist_df(q,a,L,alfa,beta,ndim,E,A)
%OTRA OPCION: spdiags en vez de sparse
%CALCULO DE h Y DE LA MAYA
```

```

h=(L-a)/(ndim+1)
h2 = h^2;
n=ndim;
x = linspace(a + h, L , ndim); %tmb vale: x=a+h:h:b+h;
% size(x)
%EVALUACION DE 'c' EN LA MAYA

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULO DE Ah%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para hacer matrix(nxm) de unos:v=ones(n,m)
%Matriz superdiagonal
Asup = sparse(1:n-1,2:n,-1/h2,n,n);
%diagonal
Adig = sparse(1:n,1:n,2/h2,n,n);
Adig(n,n)=1/h2;
%subdiagonal
Asub = sparse(2:n,1:n-1,-1/h2,n,n);

ah= Asup + Adig + Asub;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%TERMINO__INDEPENDIENTE%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[uh] = feval(q,x);
uh = uh'./(E*A);
%condiciones de contorno
uh(1) = uh(1) + alfa/h2;
uh(n) = uh(n)/2 + beta/h;
end

Función solvedf:

function [uh,error]=solve_df(ah,uh,x,iopsol,solexa)
% % %Ax=b ----> x=A\b          "\":Ae-1 * b
% % %Au=b <==> B'Bu=b
%      CHOLESKY
ah=chol(ah); % B'Bu=b
uh=ah'\uh ; % Bu=B'\b
uh=ah\uh ; % u=B\'(B'\b)

```

```
% uh = ah\uh;
if (iopsol == 1)
uhex = feval(solexa,x);
error = norm(uhex' - uh,'inf') %norma Frobenius 'fro'
end
end
```

Función $q1$:

```
function [v]= q1(x)
v = -1.5394e+03+0.*x;
return
```

Función $u1$:

```
function [v] = u1(x)
v = 5.6e-07*x.^2-1.12e-5.*x;
return
```

Discretización MOD12

Programa principal:

```
clear all
% entrada de datos
[ndim,a,L,alfa,beta,q,iopsol,solexa,E,A]=datos2;
% construccion del sistema
[x,ah,uh]=sist_df(q,a,L,alfa,beta,ndim,E,A);
% solucion del sistema y calculo de error
[uh,error]=solve_df(ah,uh,x,iopsol,solexa);
% grafica de solucion
uh=uh';
uh=[-fliplr(uh) 0 uh];
x1=10-fliplr(x);
x=[x1 5 x];
plot(x,uh,'o') %añadimos a x a y b, lo mismo pa uh
if iopsol==1
hold on;
uh=feval(solexa,x);
plot(x,uh,'+r')
```

```

legend('solucion aproximada','solucion exacta')
hold off
end

```

Función *sist_{df}*:

```

function [x,ah,uh]=sist_df(q,a,L,alfa,beta,ndim,E,A)
%OTRA OPCION: spdiags en vez de sparse
%CALCULO DE h Y DE LA MAYA

h=(L-a)/(ndim+1)
h2 = h^2;
n=ndim;
x = linspace(a + h, L , ndim); %tmb vale: x=a+h:h:b+h;
% size(x)
%EVALUACION DE 'c' EN LA MAYA

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULO DE Ah%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para hacer matrix(nxm) de unos:v=ones(n,m)
%Matriz superdiagonal
Asup = sparse(1:n-1,2:n,-1/h2,n,n);
%diagonal
Adig = sparse(1:n,1:n,2/h2,n,n);
Adig(n,n)=1/h2;
%subdiagonal
Asub = sparse(2:n,1:n-1,-1/h2,n,n);

ah= Asup + Adig + Asub;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%TERMINO__INDEPENDIENTE%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[uh] = feval(q,x);
uh = uh'./(E*A);
%condiciones de contorno
uh(1) = uh(1) + alfa/h2;
uh(n) = uh(n)/2 + beta/h;
end

```

Función *solve_df*:

```
function [uh,error]=solve_df(ah,uh,x,iopsol,solexa)
% % %Ax=b ----> x=A\b          "\":Ae-1 * b
% % %Au=b <==> B'Bu=b
%      CHOLESKY
ah=chol(ah); % B'Bu=b
uh=ah'\uh ; % Bu=B'\b
uh=ah\uh ; % u=B\'(B'\b)
% uh = ah\uh;
if (iopsol == 1)
uhex = feval(solexa,x);
error = norm(uhex' - uh,'inf') %norma Frobenius 'fro'
end
end
```

Función entrada de datos:

```
function [ndim,a,L,alfa,beta,q,iopsol,solexa,E,A]=datos2
ndim = 99 ;
a = 5 ;
L = 10 ;
q = @q2 ;
iopsol = 1 ;
solexa = @u2 ;
E = 7e9 ;
A = pi/16;
alfa = 0 ; %u(0)
beta = 100/(E*A) ; %u'(L)
end
```

Función *q2*:

```
function [v]= q2(x)
v = 2.*x-10;
return
```

Función *u2*:

```
function [v] = u2(x)
v = -2.4252e-10.*x.^3+3.64e-9.*x.^2+7.3e-8.*x-4.24e-7;
return
```

.1.2. Modelo de flexión pura Teoría de Euler-Bernoulli**Discretización MOD21**

Programa principal:

```
clear all
% entrada de datos
[ndim,a,L,q,iopsol,solexa,E,A,I]=datos3;
% construccion del sistema
[xx,ah,uh]=sist_df(q,a,L,I,ndim,E);
% solucion del sistema y calculo de error
[uh,error]=solve_df(ah,uh,xx,iopsol,solexa);
% grafica de solucion
plot([a,xx,L],[0,uh',0], 'o') %añadimos a x a y b, lo mismo pa uh
if iopsol==1
hold on;
uh=feval(solexa,xx);
plot([a,xx,L],[0,uh,0], 'r')
legend('solucion aproximada','solucion exacta')
hold off
end
```

Función *sist_{df}*:

```
function [xx,ah,uh]=sist_df(q,a,L,I,ndim,E)
%OTRA OPCION: spdiags en vez de sparse
%CALCULO DE h Y DE LA MAYA

n=ndim;
h=(L-a)/n
x=a:h:L;
xx=x(2:n); %tmb vale: x=a+h:h:b+h;
%EVALUACION DE 'c' EN LA MAYA

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULO DE Ah%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para hacer matrix(nxm) de unos:v=ones(n,m)
Asup2=sparse(1:n-3,3:n-1,1,n-1,n-1);
```

```

%Matriz superdiagonal
Asup = sparse(1:n-2,2:n-1,-4,n-1,n-1);
%diagonal
Adig = sparse(1:n-1,1:n-1,6,n-1,n-1);
Adig(n-1,n-1)=5;
Adig(1,1)=5;
%subdiagonal
Asub = sparse(2:n-1,1:n-2,-4,n-1,n-1);
%Matriz subsubdiagonal
Asub2 = sparse(3:n-1,1:n-3,1,n-1,n-1);

ah=Asup2 + Asup + Adig + Asub +Asub2;
ah=ah./h^4;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%TERMINO__INDEPENDIENTE%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% f(x)

[uh] = -feval(q,xx);
uh = uh'./(E*I);

end

Función solvedf:

function [uh,error]=solve_df(ah,uh,xx,iopsol,solexa)
% % %Ax=b -----> x=A\b          "\":Ae-1 * b
% % %Au=b <==> B'Bu=b
%      CHOLESKY
ah=chol(ah); % B'Bu=b
uh=ah'\uh ; % Bu=B'\b
uh=ah\uh ; % u=B\'(B'\b)
% uh = ah\uh;
if (iopsol == 1)
uhex = feval(solexa,xx);
error = norm(uhex' - uh,'inf') %norma Frobenius 'fro'
end
end

```


Función entrada de datos:

```
function [ndim,a,L,q,iopsol,solexa,E,A,I]=datos3
ndim = 100 ;
a = 0 ;
L = 10 ;
q = @q3 ;
iopsol = 1 ;
solexa = @u3 ;
E = 7e9 ;
A = pi/16;
I=(1/12)*(0.5)^4;    % inercia
end
```

Función $q3$:

```
function [v]= q3(x)
v=0.*x+700;
return
```

Función $u3$:

```
function [v] = u3(x)
v = -8e-7.*x.^4+1.6e-5.*x.^3-8e-4.*x;
return
```

Discretización MOD22

Programa principal:

```
clear all
% entrada de datos
[ndim,a,L,q,iopsol,solexa,E,A,I]=datos4;
% construccion del sistema
[xx,ah,u3]=sist_df(q,a,L,I,ndim,E);
% solucion del sistema y calculo de error
[u3,error]=solve_df(ah,u3,xx,iopsol,solexa);
% grafica de solucion
plot([a,xx,L],[0,u3',0], 'o') %añadimos a x a y b, lo mismo pa u3
if iopsol==1
```



```
% f(x)

[uh] = feval(q,xx);
uh = uh'./(E*I);

end
```

Función *solve_{df}*:

```
function [uh,error]=solve_df(ah,uh,xx,iopsol,solexa)
% % %Ax=b -----> x=A\b           "\":Ae-1 * b
% % %Au=b <==> B'Bu=b
%      CHOLESKY
ah=chol(ah); % B'Bu=b
uh=ah'\uh ; % Bu=B'\b
uh=ah\uh ; % u=B\'(B'\b)
% uh = ah\uh;
if (iopsol == 1)
uhex = feval(solexa,xx);
error = norm(uhex' - uh,'inf') %norma Frobenius 'fro'
end
end
```

Función entrada de datos:

```
function [ndim,a,L,q,iopsol,solexa,E,A,I]=datos4
ndim = 10 ;
a = 0 ;
L = 10 ;
q = @q4 ;
iopsol = 1 ;
solexa = @u4 ;
E = 5e4 ;
A = pi/16;
I=(1/12)*(0.5)^4; % inercia
end
```

Función *q4*:

```
function [v]= q4(x)
L=10;
v=-x.^2+x.*L-L^2/4;
return
```

Función $u4$:

```
function [v] = u4(x)
v = -1.07e-5.*x.^6+3.2e-4.*x.^5-4e-3.*x.^4+2.67e-2.*x.^3-8e-2.*x.^2;
return
```

.1.3. Modelo de flexión pura Teoría de Timoshenko

Programa principal:

```
clear all
% entrada de datos
[ndim,a,L,q,iopsol,solexa,E,G,k,A,I,theta]=datos3;
% construccion del sistema
[x,ah,uh]=sist_df(q,a,L,ndim,E,G,k,A,I);
% solucion del sistema y calculo de error
[uh,error]=solve_df(ah,uh,x,iopsol,solexa,theta,ndim);
% grafica de solucion
subplot(2,1,1);
uh=uh';
plot([a,x,L],[0,uh(1:ndim),0], 'o') %añadimos a x a y b, lo mismo pa uh
if iopsol==1
hold on;
z=feval(solexa,x);
plot([a,x,L],[0,z,0], 'r')
legend('solucion aproximada','solucion exacta')
hold off
end
subplot(2,1,2);
plot([a,x,L],[0,uh(ndim+1:2*ndim),0], 'o') %añadimos a x a y b, lo mismo pa uh
if iopsol==1
hold on;
z=feval(theta,x);
plot([a,x,L],[0,z,0], 'r')
```

```

legend('solucion aproximada','solucion exacta')
hold off
end

```

Función *sistdf*:

```

function [x,ah,uh]=sist_df(q,a,L,ndim,E,G,k,A,I)
%OTRA OPCION: spdiags en vez de sparse
%CALCULO DE h Y DE LA MAYA

h=(L-a)/(ndim+1)
h2 = h^2;
n=ndim;
n2=2*n;
x = linspace(a + h, L - h, ndim); %tmb vale: x=a+h:h:b+h;
% size(x)

%Construcción constantes:
P=E*I/h2;
Q=2*E*I/h2+G*A*k;
R=G*A*k/(2*h);
S=G*A*k/h2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para hacer matrix(nxm) de unos:v=ones(n,m)
%Matriz superdiagonal
Asup = sparse(1:n-1,2:n,R,n2,n2);

%subdiagonal
Asub = sparse(2:n,1:n-1,-R,n2,n2);

A1 = Asup + Asub;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para hacer matrix(nxm) de unos:v=ones(n,m)
%Matriz superdiagonal
Asup = sparse(1:n-1,n+2:n2,P,n2,n2);
%diagonal
Adig = sparse(1:n,n+1:n2,-Q,n2,n2);

```

```

%subdiagonal
Asub = sparse(2:n,n+1:n2-1,P,n2,n2);

A2 = Asup + Adig + Asub;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULO DE A3%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para hacer matrix(nxm) de unos:v=ones(n,m)
%Matriz superdiagonal
Asup = sparse(n+1:n2-1,2:n,S,n2,n2);
%diagonal
Adig = sparse(n+1:n2,1:n,-2*S,n2,n2);
%subdiagonal
Asub = sparse(n+2:n2,1:n-1,S,n2,n2);

A3 = Asup + Adig + Asub;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULO DE A4%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%para hacer matrix(nxm) de unos:v=ones(n,m)
%Matriz superdiagonal
Asup = sparse(n+1:n2-1,n+2:n2,-R,n2,n2);
%subdiagonal
Asub = sparse(n+2:n2,n+1:n2-1,R,n2,n2);

A4 = Asup + Asub;

ah=A1+A2+A3+A4;
size(ah);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%TERMINO__INDEPENDIENTE%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
z = -feval(q,x);
uh = sparse(n+1:n2,1,z,n2,1);

size(uh);
end

Función solvedf:

function [uh,error]=solve_df(ah,uh,x,iopsol,solexa,theta,ndim)
% % %Ax=b -----> x=A\b          "\":Ae-1 * b
% % %Au=b <==> B' Bu=b
% %      CHOLESKY

```

```

% ah=chol(ah); % B'Bu=b
% uh=ah'\uh ; % Bu=B'\b
% uh=ah\uh ; % u=B\ (B'\b)
uh = ah\uh;
error=0;
if (iopsol == 1)
uhex = feval(solexa,x);
error1 = norm(uhex' - uh(1:ndim),'inf') %norma Frobenius 'fro'
oex = feval(theta,x);
error2 = norm(oex' - uh(ndim+1:2*ndim),'inf')
error=max(error1, error2)
end
end

```

Función entrada de datos:

```

function [ndim,a,L,q,iopsol,solexa,E,G,k,A,I,theta]=datos3
ndim = 9 ;
a = 0 ;
L = 1 ;
q = @q2 ;
iopsol = 1 ;
solexa = @u3 ;
E = 7e10;
G = 2.6e10;
k = 5/6;
r=0.2;
r2 =r^2 ;
I = pi*r^4/4;
A = pi*r2;
theta = @o3;
% alfa = 1 ;
% beta = 28 ;
end

```

Función o3:

```

function [v] = o3(x)
E = 7e10;

```

```

G = 2.6e10;
k = 5/6;
r=0.2;
r2 =r^2 ;
I = pi*r^4/4;
A = pi*r2;
c1=(12*G*A*k)*(-1/(40*E*I)+1/(24*E*I)+1/(6*G*A*k))/(G*A*k+12*E*I);
c2=1/(12*E*I)-c1/2;
v = (x.^4./12-x.^3./6)/(E*I)+c1/2.*x.^2+c2.*x;
return

```

Función q_2 :

```

function [v]= q2(x)
v = 2.*x-1;
return

```

Función u_3 :

```

function [v] = u3(x)
%c1=(12*G*A*k)*(-1/(40*E*I)+1/(24*E*I)+1/(6*G*A*k))/(G*A*k+12*E*I)
%c2=1/(12*E*I)-c1/2
E = 7e10;
G = 2.6e10;
k = 5/6;
r=0.2;
r2 =r^2 ;
I = pi*r^4/4;
A = pi*r2;
c1=(12*G*A*k)*(-1/(40*E*I)+1/(24*E*I)+1/(6*G*A*k))/(G*A*k+12*E*I);
c2=1/(12*E*I)-c1/2;

v = (x.^5./60-x.^4./24)/(E*I)-(x.^3./3-x.^2/2)/(G*A*k)...
+c1.*x.^3./6+c2.*x.^2./2-(E*I*c1)/(G*A*k).*x;

return

```