



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Xeometría dos fibrados tanxentes e cotanxentes

Silvia Souto Pérez

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Xeometría dos fibrados tanxentes e cotanxentes

Silvia Souto Pérez

Xullo, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Xeometría dos fibrados tanxentes e cotanxentes
Breve descrición do contido
O principal propósito do TFG é · a descrición da estrutura tanxente canónica do fibrado tanxente · a descrición da estrutura simpléctica canónica do fibrado cotanxente · unha introdución ás variedades simplécticas
Recomendacións
Ter cursado ou estar cursando a materia de Variedades Diferenciables.
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VIII
Introdución	XI
1. Ecuacións de Euler-Lagrange e de Hamilton	1
1.1. Formulación lagrangiana	3
1.2. Formulación hamiltoniana	5
2. Formas bilineais simplécticas	7
3. Xeometría do fibrado cotanxente	13
3.1. Preliminares	13
3.2. Estrutura diferenciable do fibrado cotanxente	15
3.3. Forma simpléctica canónica en T^*M	16
3.4. Isomorfismos musicais	18
3.5. Ecuacións de Hamilton	18
4. Exemplos da formulación hamiltoniana	21
4.1. Máquina de Atwood	21
4.2. Movemento dunha partícula nun cilindro	23
4.3. Movemento dunha partícula nun campo magnético	26
5. Endomorfismos tanxentes en espazos vectoriais	29
6. Xeometría do fibrado tanxente	33
6.1. Estrutura diferenciable do fibrado tanxente	33
6.2. Campo de vectores de Liouville	35
6.3. Levantamento vertical de campos de vectores	36
6.4. Estrutura tanxente canónica en TM	37
6.5. Forma simpléctica en TM	38

6.6. Ecuacións de Euler-Lagrange	39
6.7. A aplicación de Legendre	43
7. Exemplos da formulación lagrangiana	45
7.1. Péndulo simple	45
7.2. Movemento dunha partícula nun cono	47
Bibliografía	51

Resumo

Os obxectivos principais deste traballo son:

En primeiro lugar, describir os fibrados tanxentes e cotanxentes dunha variedade diferenciable como variedades diferenciáveis, e introducir os elementos xeométricos canónicos destas variedades, como son, a 1-forma de Liouville e a estrutura simpléctica canónica no fibrado cotanxente; a estrutura tanxente canónica e o campo de vectores de Liouville no fibrado tanxente. Para isto faise, en ambos casos, unha pequena introdución dos conceptos alxébricos correspondentes a tales estruturas.

En segundo lugar, con ditos elementos xeométricos, desenvolvemos a formulación xeométrica das ecuacións de Hamilton e de Euler-Lagrange, establecendo que as solucións destas ecuacións son as curvas integrais de certos campos de vectores nos fibrados cotanxentes e tanxentes, respectivamente.

Para unha mellor comprensión de dita formulación presentamos varios exemplos físicos, tanto da formulación hamiltoniana como da lagrangiana.

Abstract

This work has two parts

Firstly, we describe the tangent and cotangent bundles of a manifold as smooth manifolds, and we introduce the geometric canonical structures on these manifolds, which are the Liouville 1-form and the canonical symplectic structure on the cotangent bundle; the canonical almost tangent structure and the Liouville vector field on the tangent bundle. In both cases we make a brief introduction to the algebraic concepts corresponding to these geometric structures.

Secondly, we develop the geometric formulation of Euler-Lagrange and Hamilton equations using these geometric tools, we show that the solutions of these equations are integral curves of certain vector fields on the cotangent and tangent manifolds, respectively.

We develop some physical examples of the Lagrangian and Hamiltonian formulation, in order to improve its understanding.

Introdución

A Mecánica Analítica é o estudo da Mecánica Clásica (Newtoniana) no seu formalismo matemático. Foi desenvolvido durante os séculos XVIII e XIX por físicos e matemáticos como Leonhard Paul Euler (1707-1783), Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e William Rowan Hamilton (1805-1865).



Euler



Lagrange



Hamilton

A Mecánica Analítica supón un capítulo moi importante na historia da Física, pois o que fai é dotar á Mecánica de Galileo e Newton dun formalismo matemático, dando así unha base máis rigorosa á Mecánica Newtoniana. Ademais, algúns dos fundamentos matemáticos da Mecánica Analítica resultaron ser imprescindibles para os avances da Física moderna, tal e como a coñecemos hoxe en día. Por exemplo, o formalismo lagrangiano resulta útil para a teoría de campos e o formalismo hamiltoniano para a Mecánica Cuántica.

As ecuacións de Euler-Lagrange e as ecuacións de Hamilton, que son sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias, xogan un papel elemental na Mecánica Clásica.

O propósito fundamental deste traballo é a descrición matemática destes dous tipos de ecuacións, coas ferramentas da Xeometría Diferencial que son principalmente: a estrutura tanxente canónica do fibrado tanxente e a estrutura simpléctica canónica do fibrado cotanxente.

No capítulo 1 faise unha breve introdución a esas ecuacións no caso de sistemas conservativos, comparándoas coas ecuacións de Newton e chegando a unha clara equivalencia entre as tres á hora de describir as ecuacións do movemento dun sistema de partículas. Todo isto realízase sen empregar os principios variacionais. As referencias bibliográficas deste capítulo son [4] e [6].

Despois divídese o traballo en dúas partes, cuxa estrutura é a seguinte:

Parte I : Fibrados cotanxentes e ecuacións de Hamilton.

O propósito desta primeira parte é describir as estruturas xeométricas do fibrado cotanxente dunha variedade diferenciable para desenvolver unha formulación xeométrica das ecuacións de Hamilton.

- **Capítulo 2. Formas bilineais simplécticas.**

Neste capítulo faise unha pequena introdución ás formas bilineais antisimétricas e non dexeneradas (formas simplécticas) definidas en espazos vectoriais, que se podería profundizar vendo as referencias [3] e [7] da bibliografía.

- **Capítulo 3. Xeometría do fibrado cotanxente.**

Descríbese o fibrado cotanxente T^*M como variedade diferenciable e introdúcense os elementos xeométricos de T^*M necesarios para desenvolver a formulación hamiltoniana: a 1-forma de Liouville e a estrutura simpléctica canónica en T^*M .

Dado un hamiltoniano $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, e utilizando a forma simpléctica canónica ω , asociámoslle o único campo de vectores X_H en T^*M que satisfai a ecuación $\omega(X_H, -) = dH$, e cuxas curvas integrais son solucións das ecuacións de Hamilton.

Este capítulo apóiase nas citas [5] e [7] para desenvolver os contidos presentes.

- **Capítulo 4. Exemplos da formulación hamiltoniana.**

Facendo uso da formulación xeométrica das ecuacións de Hamilton desenvolta no capítulo anterior, obtemos as ecuacións do movemento da máquina de Atwood, dunha partícula obrigada a moverse sobre a superficie dun cilindro e dunha partícula con carga eléctrica que se move baixo a acción dun campo magnético.

Pódense ver as referencias dos exemplos deste capítulo en [4], [6], e [8].

Parte II : Fibrados tanxentes e ecuacións de Euler-Lagrange.

O propósito desta segunda parte é describir as estruturas xeométricas do fibrado tanxente dunha variedade diferenciable para desenvolver unha formulación xeométrica das ecuacións de Euler-Lagrange.

- **Capítulo 5 : Endomorfismos tanxentes.**

Neste capítulo introdúcese o concepto de endomorfismo tanxente, isto é, unha aplicación dun espazo vectorial de dimensión par en sí mesmo $J : V \rightarrow V$ cuxo rango é a metade da dimensión do espazo e a composición con el mesmo é identicamente nula.

- **Capítulo 6: Xeometría do fibrado tanxente.**

Descríbese o fibrado tanxente TM como variedade diferenciable e introdúcense os elementos xeométricos de TM necesarios para desenvolver a formulación lagrangiana: a estrutura tanxente canónica e o campo de vectores de Liouville en TM .

Con cada lagrangiano regular $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, constrúese a función enerxía E_L e unha estrutura simpléctica ω_L en TM que nos permita asociarlle o único campo de vectores X_L que satisfai a ecuación $\omega_L(X_L, -) = dE_L$, e tal que as proxeccións en M das curvas integrais de X_L son solucións das ecuacións de Euler-Lagrange.

Os capítulos 5 e 6 apóianse en [5] para desenvolver os seus contidos.

- **Capítulo 7. Exemplos da formulación lagrangiana.**

Facendo uso da formulación xeométrica das ecuacións de Euler-Lagrange desenvolva no capítulo anterior obtemos as ecuacións do movemento do péndulo simple e dunha partícula obrigada a moverse sobre a superficie dun cono.

Pódense ver as referencias dos exemplos deste capítulo en [4] e [6].

Capítulo 1

Ecuacións de Euler-Lagrange e de Hamilton

Consideremos un sistema dinámico de N masas puntuais. Enténdese por *masa puntual* un obxecto ideal de dimensión cero, descrito pola súa masa, que consideraremos constante, e pola súa posición no espazo \mathbb{R}^3 .

Nun sistema de N masas puntuais, diremos que unha *configuración* do sistema é

$$(x^1, \dots, x^{3N}) \in \mathbb{R}^{3N},$$

onde $(x^{3i-2}, x^{3i-1}, x^{3i}) \in \mathbb{R}^3$ é a posición da masa puntual i -ésima, con $i = 1, \dots, N$.

Chamaremos *espazo de configuración* ao conxunto de todas as posibles configuracións, e denotáremolo por M .

De maneira análoga, dise que

$$(x^1, \dots, x^{3N}, v^1, \dots, v^{3N}) \in \mathbb{R}^{6N}$$

é un *estado* do sistema, onde $(v^{3i-2}, v^{3i-1}, v^{3i}) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade da masa puntual i -ésima, con $i = 1, \dots, N$. O conxunto de todos os posibles estados é o *espazo de estados*, e denotáremolo por S .

Exemplos

1. Consideremos unha masa puntual movéndose libremente no interior dunha esfera de radio 1. Os espazos de configuración e estados son

$$M = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 / (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 < 1\}, \quad S = M \times \mathbb{R}^3.$$

2. Consideremos agora unha masa puntual unida por unha corda ríxida, de lonxitude unidade, á orixe de coordenadas. Neste caso o espazo de configuración é $M = \mathbb{S}^2$, a esfera en \mathbb{R}^3 , e o espazo de estados

$$S = \{(x^1, x^2, x^3, v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 / \sum_{i=1}^3 x^i v^i = 0\} = T\mathbb{S}^2,$$

isto é, o espazo tanxente á esfera.

3. Se consideramos N masas puntuais movéndose libremente polo espazo con vector de posición $x_i = (x^{3i-2}, x^{3i-1}, x^{3i})$, o espazo de configuración é

$$M = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N} / x_i \neq x_j, \forall i \neq j\},$$

e o espazo de estados $S = M \times \mathbb{R}^{3N}$.

Nótese que M é un aberto en \mathbb{R}^{3N} , e a condición $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ é para evitar colisións que nós non consideraremos.

4. (Sólido ríxido) Neste caso, temos que $N \geq 2$ masas puntuais están sometidas a restricións fixas do tipo

$$\|x_i - x_j\| = a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

é dicir, desprázanse como se estiveran acopladas, como un sólido ríxido. O espazo de configuración é

$$M = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N} / \|x_i - x_j\| = a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N\}$$

e o espazo de estados $S = TM$, isto é, o fibrado tanxente a M (como veremos máis adiante).

En xeral, o espazo de configuración vai ser unha variedade diferenciable e o espazo de estados vai ser o seu fibrado tanxente.

Nesta breve introdución imos supoñer que non hai restricións no movemento, o que se traduce en que o espazo de configuración será \mathbb{R}^{3N} , ou no seu defecto un aberto M de \mathbb{R}^{3N} , e o de estados $M \times \mathbb{R}^{3N}$, como no caso dos exemplos 1 e 3.

Consideremos N partículas movéndose en \mathbb{R}^3 e denotemos o vector de masas por

$$(m_1, m_2, m_3, \dots, m_{3i-2}, m_{3i-1}, m_{3i}, \dots, m_{3N-2}, m_{3N-1}, m_{3N}),$$

onde $m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i} = M_i$ é a masa da partícula i -ésima.

A *Segunda Lei de Newton* establece que o movemento dun sistema de partículas se rixe polo seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde

$$F_i \left(x^j(t), \frac{dx^j}{dt} \Big|_t \right) = m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \Big|_t, \quad i, j = 1, \dots, 3N, \quad (1.1)$$

onde

$$F_i : S = M \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1 \dots, 3N,$$

sendo $(F_{3i-2}, F_{3i-1}, F_{3i})$ a forza que actúa sobre a partícula i -ésima, e (F_1, \dots, F_{3N}) a forza total do sistema.

Polo tanto, unha solución de (1.1) será unha curva

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^{3N}(t)) \end{aligned}$$

sobre o espazo de configuración, que representa o movemento das N partículas.

De agora en adiante centrarémonos só nos chamados sistemas *conservativos*, que son aqueles nos que existe unha función *potencial*

$$V : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x^i} \circ \tau, \quad i = 1, \dots, 3N$$

sendo $\tau : M \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow M$ a proxección canónica, é dicir, as forzas que actúan sobre cada partícula son funcións que só dependen das posicións e non das velocidades.

1.1. Formulación lagrangiana

A diferenza da Mecánica Newtoniana, a Lagrangiana vaise desenvolver no espazo de estados.

Definición 1.1. A *enerxía cinética* do sistema é

$$\begin{aligned} T : S = M \times \mathbb{R}^{3N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^i, v^i) &\longmapsto T(x^i, v^i) = \frac{1}{2} m_i (v^i)^2, \end{aligned}$$

e nun sistema conservativo, con enerxía potencial V , o *lagrangiano* do sistema é

$$\begin{aligned} L : S = M \times \mathbb{R}^{3N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^i, v^i) &\longmapsto L(x^i, v^i) = T(x^i, v^i) - (V \circ \tau)(x^i, v^i) = T(x^i, v^i) - V(x^i), \end{aligned}$$

que son funcións do espazo de estados. Así, o lagrangiano é a enerxía cinética menos a enerxía potencial.

Definición 1.2. As ecuacións de *Euler-Lagrange* son o seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde sobre o espazo de estados

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (1.2)$$

cuxa solución é unha curva

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^{3N}(t)) \end{aligned}$$

sobre o espazo de configuración, e $\dot{\alpha}$ denota a curva levantamento tanxente de α , cuxa expresión é

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \times \mathbb{R}^{3N} \\ t &\longmapsto \dot{\alpha}(t) = \left(x^1(t), \dots, x^{3N}(t), \frac{dx^1}{dt}\Big|_t, \dots, \frac{dx^{3N}}{dt}\Big|_t \right). \end{aligned}$$

É fácil ver que $\dot{\alpha}(t)$ é curva integral do seguinte campo de vectores X_L sobre o espazo de estados S , dado por

$$X_L(x^i, v^i) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Teorema 1.3. Nun sistema conservativo, as ecuacións de Newton (1.1) son equivalentes ás ecuacións de *Euler-Lagrange* (1.2).

Demostración. Da definición 1.1, obtemos as seguintes derivadas parciais

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = m_i v^i, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \circ \tau.$$

Sexa $\alpha(t)$ unha solución de (1.2), entón

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) = m_i v^i(\dot{\alpha}(t)) = m_i \frac{dx^i}{dt}\Big|_t, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \dot{\alpha}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \circ \alpha(t),$$

polo tanto $\alpha(t)$ é solución de

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) = m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2}\Big|_t + \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0,$$

co que chegamos a que

$$m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2}\Big|_t = -\frac{\partial V}{\partial x^i},$$

é dicir, $\alpha(t)$ é solución de (1.1).

O recíproco realízase de forma análoga. □

Observación 1.4. A función lagrangiana contén toda a información dinámica do sistema. Unha das propiedades máis interesantes das ecuacións de Euler-Lagrange é que non dependen das coordenadas escollidas.

1.2. Formulación hamiltoniana

Defínese o *espazo de fases* ou *espazo de momentos* como

$$S^* = M \times (\mathbb{R}^{3N})^*,$$

onde $(\mathbb{R}^{3N})^*$ é o espazo dual de \mathbb{R}^{3N} .

As coordenadas dun punto $(x, \alpha) \in S^* = M \times (\mathbb{R}^{3N})^*$, onde $\alpha = \alpha_i dx^i$, son

$$(x^1, \dots, x^{3N}, p_1, \dots, p_{3N}),$$

con $p_i(x, \alpha) = \alpha_i$.

Seguindo no caso dun sistema conservativo introducimos agora a función hamiltoniana, que a diferenza da lagrangiana, está definida no espazo de fases.

Definición 1.5. Denomínase *hamiltoniano* do sistema á seguinte aplicación

$$\begin{aligned} H : S^* = M \times (\mathbb{R}^{3N})^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^i, p_i) &\longmapsto \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{m_i} + V(x^i), \end{aligned}$$

isto é, a enerxía total do sistema (enerxía cinética + enerxía potencial).

Definición 1.6. As ecuacións de *Hamilton* son o seguinte sistema de ecuacións diferenciais de primeira orde

$$\left. \frac{dx^i}{dt} \right|_t = \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \beta(t), \quad \left. \frac{dp_i}{dt} \right|_t = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \circ \beta(t), \quad (1.3)$$

cuxa solución é unha curva

$$\begin{aligned} \beta : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \times (\mathbb{R}^{3N})^* \\ t &\longmapsto \beta(t) = (x^i(t), p_i(t)) \end{aligned}$$

sobre o espazo de fases.

É fácil ver que $\beta(t)$ é curva integral do seguinte campo de vectores X_H sobre o espazo de fases S^* , dado por

$$X_H(x^i, p_i) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Vexamos agora que as ecuacións de Hamilton son equivalentes ás de Euler-Lagrange. Da ecuación (1.3), deducimos que

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{dt}\Big|_t &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \beta(t) = \frac{p_i}{m_i} \circ \beta(t) = \frac{p_i(\beta(t))}{m_i} = \frac{p_i(t)}{m_i} \\ \frac{dp_i}{dt}\Big|_t &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \circ \beta(t) = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \circ \alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \dot{\alpha}(t)\end{aligned}\tag{1.4}$$

onde $\alpha(t) = (x^i(t))$ e $\dot{\alpha}(t) = \left(x^i(t), \frac{dx^i}{dt}\Big|_t\right)$.

Así, de (1.4) obtemos

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) = m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2}\Big|_t = -\frac{\partial V}{\partial x^i} \circ \alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \circ \dot{\alpha}(t),$$

é dicir, $\beta(t) = (x^i(t), p_i(t))$ é solución das ecuacións de Hamilton se e só se $\alpha(t) = (x^i(t))$ é solución das ecuacións de Euler-Lagrange, feito que recolleemos no seguinte teorema.

Teorema 1.7. *Nun sistema conservativo, as ecuacións de Hamilton (1.3) son equivalentes ás ecuacións de Euler-Lagrange (1.2), e polo tanto ás ecuacións de Newton (1.1).*

As solucións das ecuacións de Euler-Lagrange e as solucións das ecuacións de Hamilton están relacionadas mediante a aplicación de Legendre, que introducimos a continuación.

Definición 1.8. Dado un lagrangiano L , defínese a *aplicación de Legendre* como

$$\begin{aligned}FL : S = M \times \mathbb{R}^{3N} &\longrightarrow S^* = M \times (\mathbb{R}^{3N})^* \\ (x^i, v^i) &\longmapsto \left(x^i, \frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = (x^i, m_i v^i)\end{aligned}$$

que é unha aplicación bixectiva e con inversa

$$FL^{-1}(x^i, p_i) = \left(x^i, \frac{1}{m_i} p_i\right),$$

e se tamén é diferenciable, isto é, un difeomorfismo, denomínase *transformación de Legendre*.

Se T é a enerxía cinética do sistema, entón

$$\frac{1}{2} \frac{p_i^2}{m_i} = T(FL^{-1}(x^i, p_i)),$$

e polo tanto

$$H(x^i, p_i) = T(FL^{-1}(x^i, p_i)) + V(x^i).$$

Capítulo 2

Formas bilineais simplécticas

O termo simpléctico vén do grego *symplektikos*, que significa “que entrelaza” ou “que une”, o que resulta apropiado para as ecuacións de Hamilton (1.3), onde se ve que as x_i están relacionadas cas derivadas con respecto ás p_i , e as p_i o fan da mesma forma cas derivadas negativas con respecto ás x_i . Este termo foi introducido por primeira vez en 1939 por Hermann Weyl no seu libro *The Classical Groups* (ver [9]).

Sexa V un espazo vectorial real e $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ unha aplicación bilinear. Sexa $\{e_1, \dots, e_m\}$ unha base de V e $\{e^1, \dots, e^m\}$ a base (dual) de V^* .

Se $\omega(e_i, e_j) = \omega_{ij}$, podemos escribir

$$\omega = \sum_{i,j=1}^m \omega_{ij} e^i \otimes e^j,$$

onde \otimes representa o produto tensorial.

Definimos a aplicación

$$\begin{aligned} \flat : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto \flat(v) = i_v \omega = \omega(v, -), \end{aligned}$$

onde $i_v \omega$ denota o produto interior, e así

$$\flat(e_i) = \sum_{j=1}^m \omega_{ij} e^j,$$

e (ω_{ij}) é a matriz asociada a \flat .

Por outro lado, sabemos que o rango de \flat é a dimensión da súa imaxe, que á súa vez é o rango da súa matriz asociada, é dicir,

$$\text{rango } \flat = \dim \text{Im } \flat = \text{rango } \omega,$$

e como

$$\dim \ker \flat + \dim \text{Im } \flat = \dim V = m$$

temos que

$$\text{rango } \omega = m \iff \ker \flat = \{0\} \iff \flat \text{ é inyectiva.}$$

Como estamos entre espazos da mesma dimensión, tense que \flat é un isomorfismo se e só se o rango de ω é máximo.

Agora ben,

$$\begin{aligned} \text{rango } \omega = m = \dim V &\iff \ker \flat = \{0\} \iff [\flat(v) = 0 \implies v = 0] \\ &\iff [\omega(v, w) = 0, \forall w \in V \implies v = 0] \iff \omega \text{ é non dexenerada.} \end{aligned}$$

Polo tanto,

Proposición 2.1. *Son equivalentes:*

- i) ω é de rango máximo.
- ii) $\flat : V \longrightarrow V^*$ é un isomorfismo lineal.
- iii) ω é non dexenerada.

O seguinte resultado proporciona a forma estándar para as aplicacións bilineais e anti-simétricas.

Teorema 2.2. *Sexa ω unha aplicación bilineal e antisimétrica en V . Entón existe unha base $\{e_1, \dots, e_s, u_1, \dots, u_s, f_1, \dots, f_k\}$ de V tal que:*

$$\begin{aligned} \omega(e_i, e_j) &= 0 = \omega(u_i, u_j), & \text{para todo } i, j \in \{1, \dots, s\} \\ \omega(e_i, u_j) &= \delta_{ij}, & \text{para todo } i, j \in \{1, \dots, s\} \\ \omega(f_i, v) &= 0, & \text{para todo } i \in \{1, \dots, k\}, \text{ e para todo } v \in V. \end{aligned}$$

Observación 2.3.

1. A base do Teorema 2.2 non é única, aínda que tradicionalmente denomínase base “canónica”.
2. Na notación matricial con respecto a tal base, tense

$$\omega(v, v') = \begin{pmatrix} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_s & 0 \\ -I_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' \end{pmatrix}, \quad \forall v, v' \in V$$

e onde I_s denota a matriz identidade de dimensión s .

Demostración. Esta demostración por indución é unha versión antisimétrica do proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Sexa $U := \{u \in V / \omega(u, v) = 0, \text{ para todo } v \in V\}$.

Eliximos unha base $\{f_1, \dots, f_k\}$ de U e un espazo W complementario de U en V , así $V = U \oplus W$.

Sexa $e_1 \in W$ calquera vector non nulo. Entón existe $u_1 \in W$ tal que $\omega(e_1, u_1) \neq 0$. Supoñamos que $\omega(e_1, u_1) = 1$. Sexa

$$W_1 = \langle e_1, u_1 \rangle$$

$$W_1^\omega = \{w \in W / \omega(w, v) = 0, \text{ para todo } v \in W_1\}$$

Verifícase:

- $W_1 \cap W_1^\omega = \{0\}$.

En efecto, supoñamos que $v = a e_1 + b u_1 \in W_1 \cap W_1^\omega$, entón

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \omega(v, e_1) = -b \\ 0 = \omega(v, u_1) = a \end{array} \right\} \Rightarrow v = 0$$

- $W_1 \oplus W_1^\omega = W$.

En efecto, supoñamos que $v \in W$ verifica $\omega(v, e_1) = c$ e $\omega(v, u_1) = d$, entón

$$v = \underbrace{(-c u_1 + d e_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(v + c u_1 - d e_1)}_{\in W_1^\omega}.$$

Polo tanto, podemos escribir

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_1^\omega$$

e repetimos de novo o proceso anterior.

Sexa $e_2 \in W_1^\omega$, $e_2 \neq 0$. Existe $u_2 \in W_1^\omega$ tal que $\omega(e_2, u_2) \neq 0$. Supoñamos que $\omega(e_2, u_2) = 1$.

Sexa $W_2 = \langle e_2, u_2 \rangle$. Razoando de modo similar ao anterior chegamos a que

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_2^\omega.$$

Este proceso finaliza nun número finito de pasos por ser $\dim V < \infty$. Polo tanto, obtemos

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_n$$

onde todos os sumandos son ortogonais respecto a ω , e cada $W_i = \langle e_i, u_i \rangle$ con $\omega(e_i, u_i) = 1$.

A dimensión do subespazo U non depende da elección da base, polo tanto $k = \dim U$ é un invariante de (V, ω) .

Posto que $k + 2s = m = \dim V$, temos que n é un invariante de (V, ω) .

A $2n$ chámasele rango de ω . □

Como consecuencia do teorema anterior dedúcese o seguinte resultado.

Corolario 2.4. *Sexa V un espazo vectorial de dimensión m e ω unha forma bilineal antisimétrica e non dexenerada (rango máximo). Entón a dimensión de V é par, $m = 2n$, e existe unha base $\{e_1, \dots, e_n, u_1, \dots, u_n\}$ de V tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n e^i \wedge u^i,$$

onde $\{e^i, u^i\}$ é a base dual, e a súa matriz asociada é

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

que se denomina matriz estándar.

Definición 2.5. Unha forma simpléctica nun espazo vectorial real V , de dimensión finita, é unha forma bilineal $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- ω é antisimétrica: $\omega(x, y) = -\omega(y, x), \forall x, y \in V$
- ω é non dexenerada, é dicir,

$$\omega(x, y) = 0, \forall y \in V \Rightarrow x = 0,$$

ou equivalentemente, a aplicación

$$\begin{aligned} \flat : V &\longrightarrow V^* \\ x &\longmapsto \flat(x) = \omega(x, -) \end{aligned}$$

é un isomorfismo.

Denotamos por

$$\begin{aligned} \sharp : V^* &\longrightarrow V \\ \alpha &\longmapsto \sharp(\alpha) = \alpha^\sharp \end{aligned}$$

ao isomorfismo inverso de \flat .

Observación 2.6. Os isomorfismos \flat (bemol) e \sharp (sostenido) denomínanse *isomorfismos musicais* porque suben e baixan os índices dos vectores. Por exemplo, un vector no espazo tanxente escríbese como $\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e un covector como $\alpha_i dx^i$, polo que o índice i baixa e sube en α da mesma forma que o bemol \flat e o sostenido \sharp baixan e elevan o son nun semitono.

Unha das primeiras persoas en utilizar esta terminoloxía foi o matemático Marcel Berger en 1971 no seu libro *Le spectre d'une variété Riemannienne* (ver [2]), onde facía uso dos isomorfismos musicais particularmente para métricas de Riemann.

Definición 2.7. Chámase *espazo vectorial simpléctico* a un espazo vectorial V provisto dunha forma simpléctica ω .

Do corolario anterior sabemos que todo espazo vectorial simpléctico é de dimensión par.

Lema 2.8. *Sexa V un espazo vectorial simpléctico, $\{e_i, u_i\}$ unha base de V (como a descrita no corolario 2.4) tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n e^i \wedge u^i,$$

entón verifícase

$$\begin{aligned} \flat(e_i) &= u^i & \flat(u_i) &= -e^i \\ \sharp(e^i) &= -u_i & \sharp(u^i) &= e_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

Demostración. A matriz asociada a ω é da forma

$$\begin{pmatrix} \omega(e_i, e_j) & \omega(e_i, u_j) \\ \omega(u_i, e_j) & \omega(u_i, u_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

onde δ_{ij} é a delta de Kronecker.

Probaremos o resultado para \flat , xa que \sharp realizárase de maneira análoga.

Escribimos $\flat(e_i)$ como combinación lineal dos vectores da base dual

$$\flat(e_i) = \omega(e_i, -) = a_{ij} e^j + b_{ij} u^j,$$

e aplicámosllo aos vectores da base

$$\flat(e_i)(e_k) = \omega(e_i, e_k) = 0 \Rightarrow a_{ik} = 0$$

$$\flat(e_i)(u_k) = \omega(e_i, u_k) = \delta_{ik} \Rightarrow b_{ik} = \delta_{ik}$$

tendo así $\flat(e_i) = u^i$.

Por outro lado, escribimos tamén $\flat(u_i)$ como combinación lineal dos vectores da base dual

$$\flat(u_i) = \omega(u_i, -) = a_{ij} e^j + b_{ij} u^j,$$

e repetindo o mesmo proceso

$$b(u_i)(e_k) = \omega(u_i, e_k) = -\delta_{ik} \Rightarrow a_{ik} = -\delta_{ik}$$

$$b(u_i)(u_k) = \omega(u_i, u_k) = 0 \Rightarrow b_{ik} = 0$$

temos que $b(u_i) = -e^i$. □

Vexamos agora un par de exemplos de espazos vectoriais simplécticos.

Exemplo 2.9. Espazo posición-momento (x, α) .

Sexa W un espazo vectorial, W^* o seu dual e $V = W \times W^*$. Definimos a forma

$$\begin{aligned} \omega: (W \times W^*) \times (W \times W^*) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2)) &\longmapsto \alpha_2(x_1) - \alpha_1(x_2) \end{aligned}$$

onde $x_1, x_2 \in W$, $\alpha_i : W \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Resulta fácil probar que ω é bilinear, antisimétrica e non dexenerada e, polo tanto, (V, ω) un espazo vectorial simpléctico.

Supoñamos que W ten dimensión n e tomamos $\{e_1, \dots, e_n\}$ como base de W e $\{e^1, \dots, e^n\}$ como a súa base dual, isto é, $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

Entón $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e^1), \dots, (0, e^n)\}$ é base de V e a matriz de ω respecto desta base é

$$\begin{pmatrix} \omega((e_i, 0), (e_j, 0)) & \omega((e_i, 0), (0, e^j)) \\ \omega((0, e^i), (e_j, 0)) & \omega((0, e^i), (0, e^j)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^j(e_i) \\ -e^i(e_j) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

Exemplo 2.10. Espazo posición-velocidade (x, \dot{x}) .

Sexa W un espazo vectorial cun produto interior, $V = W \times W$ e

$$\begin{aligned} \omega: (W \times W) \times (W \times W) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, \dot{x}), (y, \dot{y})) &\longmapsto x \dot{y} - \dot{x} y. \end{aligned}$$

De novo, é fácil ver que ω é bilinear, antisimétrica e non dexenerada, e polo tanto, unha forma simpléctica.

Capítulo 3

Xeometría do fibrado cotanxente

3.1. Preliminares

Comezaremos recordando a definición de variedade diferenciable e a construción do seu fibrado tanxente e cotanxente, para así poder dar un sistema de coordenadas que nos axude a estudar as súas estruturas diferenciables. En particular, neste capítulo centrarémonos na do fibrado cotanxente.

Definición 3.1. Sexa M un espazo topolóxico, que consideraremos Hausdorff e segundo numerable. Unha *estrutura diferenciable* sobre M é unha familia $\mathcal{D} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ verificando:

- $\{U_i\}_{i \in I}$ é un recubrimento por abertos de M .
- Para todo $i \in I$, U_i é homeomorfo a un aberto de \mathbb{R}^n , sendo n un enteiro $n \geq 1$.
- Se $i, j \in I$ son tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entón a aplicación

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

é un difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^n .

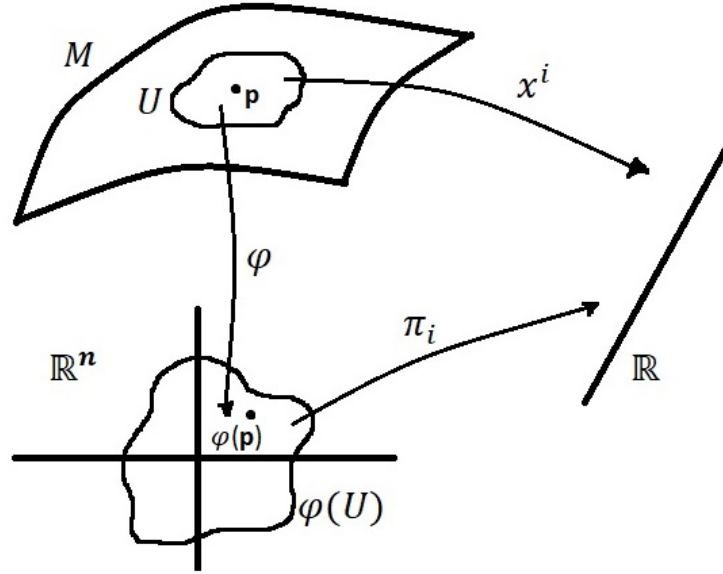
- A familia \mathcal{D} é maximal, no sentido de que \mathcal{D} contén a todos os pares (U, φ) cumprindo:
 1. U é un aberto de M e φ un homeomorfismo sobre un aberto de \mathbb{R}^n .
 2. Para todo $i \in I$ tal que $U \cap U_i \neq \emptyset$, $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ é un difeomorfismo.

Diremos que $M \equiv (M, \mathcal{D})$ é unha *variedade diferenciable* de dimensión n . A cada par $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ chámasele *entorno coordinado* ou *carta* da variedade, e a cada recubrimento $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M por cartas de \mathcal{D} , *atlas* de M .

Consideremos entón unha variedade diferenciable M de dimensión n , e (U, φ) unha carta en M . A aplicación $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é un difeomorfismo.

Representando por $\pi_i, i = 1, \dots, n$, ás proxeccións de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , temos un sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) en U definido por

$$x^i = \pi_i \circ \varphi, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$



Denotaremos por $T_p M$ ao *espazo tanxente* a M no punto p , e por $T_p^* M$ ao espazo dual, é dicir, o *espazo cotanxente* de M en p .

Coa notación anterior, temos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ e $\{dx^1(p), \dots, dx^n(p)\}$ son bases de $T_p M$ e $T_p^* M$, respectivamente.

Definición 3.2. Defínese o *fibrado tanxente* a M como o conxunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v_p) / p \in M, v_p \in T_p M\}$$

e o *fibrado cotanxente* como

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M = \{(p, \alpha_p) / p \in M, \alpha_p \in T_p^* M\}.$$

Representaremos por $\tau : TM \rightarrow M$ e por $\pi : T^*M \rightarrow M$ ás proxeccións canónicas, isto é, $\tau(v_p) = p$, se $v_p \in T_p M$ e $\pi(\alpha_p) = p$, se $\alpha_p \in T_p^* M$.

3.2. Estructura diferenciable do fibrado cotanxente

A partir dunha estrutura diferenciable en M constrúese unha estrutura diferenciable en T^*M , como veremos a continuación.

Cada carta (U, φ) en M induce unha carta $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ en T^*M , onde $\pi^{-1}(U) = T^*U$ e $\tilde{\varphi}$ é o difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: T^*U &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \alpha_p &\longmapsto \left((\varphi \circ \pi)(\alpha_p), \alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p \right), \dots, \alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right) \right). \end{aligned}$$

Entón temos un sistema de coordenadas *canónicas* (x^i, p_i) en $T^*U \subseteq T^*M$ de forma que

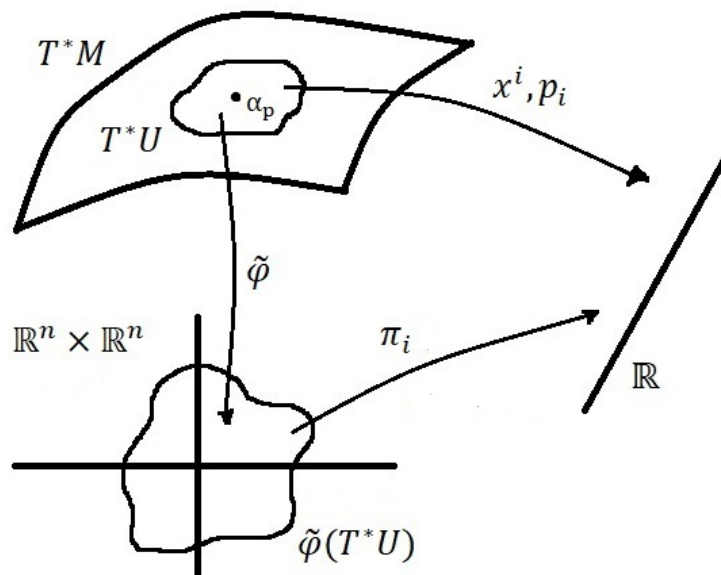
$$\begin{aligned} x^i &= \pi_i \circ \tilde{\varphi}, & \forall i = 1, \dots, n \\ p_i &= \pi_{i+n} \circ \tilde{\varphi}, & \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

e polo tanto

$$x^i(\alpha_p) = x^i(p), \quad p_i(\alpha_p) = \alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

sendo

$$\alpha_p \in T^*M, \quad \alpha_p: T_pM \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha_p = \alpha_i dx^i(p).$$



Da mesma forma, podemos considerar o espazo tanxente á variedade T^*M en cada punto e o seu espazo dual, construindo así

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\alpha_p}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{\alpha_p}, \frac{\partial}{\partial p_1} \Big|_{\alpha_p}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} \Big|_{\alpha_p} \right\}$$

unha base para $T_{\alpha_p}(T^*M)$ e

$$\{dx^1(\alpha_p), \dots, dx^n(\alpha_p), dp_1(\alpha_p), \dots, dp_n(\alpha_p)\}$$

unha base para $T_{\alpha_p}^*(T^*M)$.

Un dos obxectos xeométricos máis importantes do fibrado cotanxente é a forma simpléctica canónica, que introducimos a continuación.

3.3. Forma simpléctica canónica en T^*M

Dada a variedade diferenciable T^*M , defínese a 1-forma de Liouville $\theta \in \Omega^1(T^*M)$, no punto $\alpha_p \in T^*M$, como

$$\begin{aligned} \theta(\alpha_p) : T_{\alpha_p}(T^*M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X_{\alpha_p} &\longmapsto \theta(\alpha_p)(X_{\alpha_p}) = \alpha_p(\pi_*(\alpha_p)(X_{\alpha_p})) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $X_{\alpha_p} \in T_{\alpha_p}(T^*M)$ e $\pi_*(\alpha_p) : T_{\alpha_p}(T^*M) \longrightarrow T_pM$ é a diferencial da proxección π do fibrado cotanxente no punto α_p .

Temos entón, o seguinte diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_{\alpha_p}(T^*M) & \xrightarrow{\theta(\alpha_p)} & \mathbb{R} \\ \pi_*(\alpha_p) \downarrow & \nearrow \alpha_p & \\ T_pM & & \end{array}$$

Se escribimos agora θ localmente como combinación lineal dos elementos da base de $\Omega^1(T^*M)$ (isto denota as 1-formas diferenciables en T^*M), temos

$$\theta = a^i dx^i + b^i dp_i,$$

e tendo en conta que

$$\pi_*(\alpha_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha_p} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad \text{e} \quad \pi_*(\alpha_p) \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{\alpha_p} \right) = 0,$$

da expresión (3.1) obtemos que $a^i = \delta_{ij}$ e $b^i = 0$, e polo tanto a expresión local de θ en coordenadas canónicas é

$$\theta = p_i dx^i.$$

A partir da 1-forma de Liouville θ defínese a 2-forma canónica $\omega = -d\theta \in \Omega^2(T^*M)$, onde d denota o operador diferencial exterior, e cuxa expresión local é

$$\omega = -d\theta = dx^i \wedge dp_i. \quad (3.2)$$

Así, ω é unha 2-forma diferencial exacta, xa que $\omega = d(-\theta)$, e polo tanto pechada, $d\omega = d(-d\theta) = 0$.

Sexan $X, Y \in \mathfrak{X}(T^*M)$, vexamos agora como é o produto $\omega(X, Y)$ destes dous campos de vectores en T^*M . Supoñamos que as súas expresións locais son

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial p_i} \quad e \quad Y = c^i \frac{\partial}{\partial x^i} + d^i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

onde a^i, b^i, c^i e d^i son funcións diferenciables dun aberto de T^*M en \mathbb{R} .

Entón, aplicando a expresión (3.2) a estes dous campos, obtemos

$$\omega(X, Y) = a^i dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) d^i dp_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right) - b^i dp_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right) c^i dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = a^i d^i - b^i c^i.$$

Se consideramos agora como campos de vectores os elementos da base local, é dicir, as derivadas parciais con respecto ás coordenadas x^i e as derivadas parciais con respecto ás coordenadas p_i , desta expresión anterior dedúcese que a matriz asociada a ω en cada punto é

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

que é non singular, e polo tanto ω é non dexenerada.

Esta 2-forma diferencial ω coñécese co nome de *forma simpléctica canónica* do fibrado cotanxente.

Observación 3.3. Unha forma simpléctica nunha variedade diferenciable é unha 2-forma verificando unha condición alxébrica (non dexenerada) e unha condición analítica (pechada). O exemplo canónico témolo no capítulo 2 (no caso do espazo vectorial \mathbb{R}^{2n}) e na forma simpléctica canónica do fibrado cotanxente.

Unha variedade diferenciable N provista dunha forma simpléctica ω denomínase *variedade simpléctica* e denótase por (N, ω) .

Toda variedade simpléctica é de dimensión par e localmente a súa forma simpléctica asociada vén dada como a forma simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2n} , tal como establece o teorema de Darboux.

Teorema 3.4 (de Darboux). *Sexa (N, ω) unha variedade simpléctica, entón para todo punto $p \in N$ existe unha carta local*

$$(U, (x^i, p_i)), \quad i = 1, \dots, n$$

onde U é un entorno aberto de p en N e tal que

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp_i.$$

3.4. Isomorfismos musicais

Consideremos a variedade simpléctica (T^*M, ω) , posto que ω é unha forma non dexe-nerada, temos que a aplicación

$$\begin{aligned} \flat_{\alpha_p} : T_{\alpha_p}(T^*M) &\longrightarrow T_{\alpha_p}^*(T^*M) \\ v_{\alpha_p} &\longmapsto \flat_{\alpha_p}(v_{\alpha_p}) = \omega(\alpha_p)(v_{\alpha_p}, -) = i_{v_{\alpha_p}}\omega(\alpha_p) \end{aligned}$$

é un isomorfismo de espazos vectoriais, que induce o isomorfismo de módulos

$$\begin{aligned} \flat : \mathfrak{X}(T^*M) &\longrightarrow \Omega^1(T^*M) \\ X &\longmapsto \flat(X) = \omega(X, -) = i_X\omega \end{aligned} \tag{3.3}$$

que leva campos de vectores en T^*M en 1-formas en T^*M .

Denotaremos o isomorfismo de módulos inverso por

$$\sharp : \Omega^1(T^*M) \longrightarrow \mathfrak{X}(T^*M).$$

Lema 3.5. *Os isomorfismos musicais veñen determinados polas seguintes identidades:*

$$\begin{aligned} \flat\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha_p}\right) &= dp_i(\alpha_p) & \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\Big|_{\alpha_p}\right) &= -dx^i(\alpha_p) \\ \sharp(dx^i(\alpha_p)) &= -\frac{\partial}{\partial p_i}\Big|_{\alpha_p} & \sharp(dp_i(\alpha_p)) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha_p} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Demostración. Directa do lema 2.1. □

3.5. Ecuacións de Hamilton

Denomínase función hamiltoniana a calquera función $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable definida en T^*M . Tendo en conta o isomorfismo de módulos definido en (3.3), existe un único campo de vectores $X_H \in \mathfrak{X}(T^*M)$ que é solución da ecuación

$$\flat(X_H) = \omega(X_H, -) = dH, \tag{3.5}$$

é dicir

$$X_H = \flat^{-1}(dH) = \sharp(dH).$$

O campo de vectores X_H chámase campo de vectores hamiltoniano correspondente á función H , e a terna (T^*M, ω, H) chámase *sistema hamiltoniano*.

Considerando o sistema de coordenadas canónicas (x^i, p_i) en T^*M , pódese escribir X_H da forma

$$X_H = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

e así, aplicándolle \flat e tendo en conta (3.4) tense

$$\flat(X_H) = a^i dp_i - b^i dx^i.$$

Utilizando agora que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

e igualando ao anterior na ecuación (3.5) chégase a que

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (3.6)$$

Consideremos agora unha curva integral $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow T^*M$ do campo de vectores X_H dada localmente por $\gamma(t) = (x^i(t), p_i(t))$, da ecuación (3.6) obtéñense as ecuacións diferenciais ordinarias

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \circ \gamma, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \circ \gamma, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

que son as *ecuacións de Hamilton da Mecánica Clásica*, cando H é a función hamiltoniana dun sistema dinámico.

Estas ecuacións pódense escribir en forma matricial como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^i \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x^j} \\ \frac{\partial H}{\partial p_j} \end{pmatrix}.$$

Así, a ecuación (3.5) pódese interpretar como a versión xeométrica das ecuacións de Hamilton sobre unha variedade simpléctica.

Capítulo 4

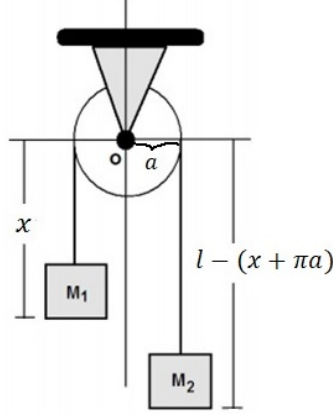
Exemplos da formulación hamiltoniana

O noso obxectivo é utilizar a formulación xeométrica descrita no capítulo anterior para obter as ecuacións do movemento da máquina de Atwood e dunha partícula obrigada a moverse sobre a superficie dun cilindro. Podería facerse dunha maneira máis directa utilizando as ecuacións de Hamilton na física, pero usaremos o formalismo matemático para unha mellor comprensión da teoría vista nos dous capítulos anteriores.

Finalizaremos o capítulo obtendo as ecuacións do movemento dunha partícula nun campo magnético. Neste exemplo emprégase a forma simpléctica magnética, que é unha pequena modificación da forma simpléctica canónica debido á presenza do campo magnético.

4.1. Máquina de Atwood

Consideremos unha polea de radio a que ten o seu centro na orixe de coordenadas, e pola cal pasa unha corda de lonxitude l en cuxos extremos colgan dous obxectos con diferentes masas m_1 e m_2 , con $m_1 < m_2$. Desprézase o rozamento na polea.



Se x denota o desprazamento da masa m_1 , o desprazamento da masa m_2 vén dado por $l - (x + \pi a)$. Polo tanto, neste caso o espazo de configuración é o intervalo aberto $M = (0, l - \pi a)$ con coordenada x , as coordenadas en T^*M son (x, p) e a 2-forma canónica é $\omega = dx \wedge dp$.

O hamiltoniano do sistema $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ neste exemplo vén dado por

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_1 + m_2} + (m_2 - m_1) g x - m_2 g (l - \pi a),$$

onde g denota a aceleración da gravidade.

Sexa X_H o único campo de vectores en T^*M solución da ecuación

$$\flat(X_H) = \omega(X_H, -) = dH,$$

e supoñamos que a súa expresión local é

$$X_H = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial p},$$

onde a e b son funcións das coordenadas (x, p) .

Do Lema 3.4 temos

$$\begin{aligned} \flat(X_H) &= \flat\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial p}\right) = a \flat\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + b \flat\left(\frac{\partial}{\partial p}\right) = a dp + b(-dx) \\ &= -b dx + a dp \end{aligned}$$

e de

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial p} dp = (m_2 - m_1) g dx + \frac{p}{m_1 + m_2} dp$$

chegamos a que

$$X_H = \frac{p}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial x} - (m_2 - m_1) g \frac{\partial}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial x} + (m_1 - m_2) g \frac{\partial}{\partial p}. \quad (4.1)$$

Sexa $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow T^*M$ con $\alpha(t) = (x(t), p(t))$ unha curva integral de X_H , entón

$$X(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t) = \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\alpha(t)} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial}{\partial p} \Big|_{\alpha(t)}, \quad (4.2)$$

e de (4.1) e (4.2) deducimos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p(\alpha(t))}{m_1 + m_2} = \frac{p(t)}{m_1 + m_2}, \quad \frac{dp}{dt} = (m_1 - m_2)g,$$

e polo tanto, temos que o movemento da partícula $x(t)$ queda determinado pola seguinte ecuación diferencial de segunda orde

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p(t)}{m_1 + m_2} \right) = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)}.$$

4.2. Movemento dunha partícula nun cilindro

Consideremos unha partícula de masa m obrigada a moverse sobre a superficie dun cilindro recto de radio R

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = R^2\}.$$

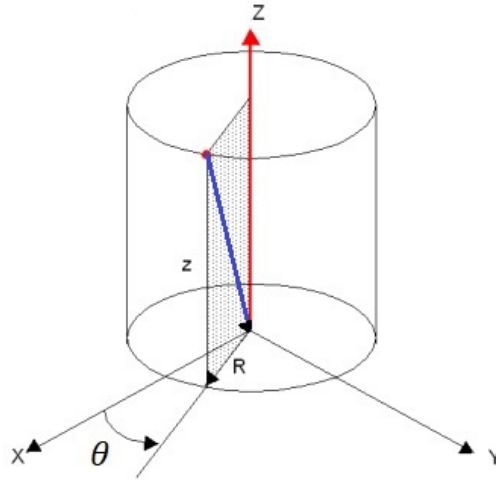
A partícula está suxeita a unha forza dirixida cara á orixe e proporcional á distancia da partícula á orixe: $F = -k(x, y, z)$ (non existe fricción).

Consideremos unha parametrización do cilindro dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &: (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow M \\ (\theta, z) &\longmapsto \mathbb{X}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z), \end{aligned}$$

que se corresponde coa parametrización da superficie de revolución xerada pola recta $x = R$ ao xirar en torno ao eixo z .

Esta parametrización cobre todo o cilindro menos a recta $x = R$, correspondente ao caso $\theta = 0 = 2\pi$.



Se agora consideramos outra parametrización

$$\begin{aligned}\tilde{X} &: (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow M \\ (\theta, z) &\longmapsto \tilde{X}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z),\end{aligned}$$

xa teríamos cuberto o caso $\theta = 0$.

As coordenadas en M e en T^*M son

$$(x^1, x^2) = (\theta, z) \quad (x^1, x^2, p_1, p_2) = (\theta, z, p_\theta, p_z)$$

e a 2-forma canónica é

$$\omega = d\theta \wedge dp_\theta + dz \wedge dp_z.$$

O hamiltoniano do sistema neste exemplo vén dado por

$$H(\theta, z, p_\theta, p_z) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k(R^2 + z^2).$$

Sexa X_H o único campo de vectores en T^*M solución da ecuación

$$\flat(X_H) = \omega(X_H, -) = dH,$$

e supoñamos que a súa expresión local é

$$X_H = a \frac{\partial}{\partial \theta} + b \frac{\partial}{\partial z} + c \frac{\partial}{\partial p_\theta} + d \frac{\partial}{\partial p_z},$$

onde a , b , c e d son funcións das coordenadas $(\theta, z, p_\theta, p_z)$.

Do Lema 3.4, sabemos

$$\begin{aligned} \flat\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) &= dp_\theta & \flat\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= dp_z \\ \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_\theta}\right) &= -d\theta & \flat\left(\frac{\partial}{\partial p_z}\right) &= -dz \end{aligned}$$

e polo tanto

$$\flat(X_H) = \flat\left(a\frac{\partial}{\partial\theta} + b\frac{\partial}{\partial z} + c\frac{\partial}{\partial p_\theta} + d\frac{\partial}{\partial p_z}\right) = a dp_\theta + b dp_z - c d\theta - d dz. \quad (4.3)$$

Por outro lado, temos que a diferencial da aplicación H é

$$dH = \frac{\partial H}{\partial\theta} d\theta + \frac{\partial H}{\partial z} dz + \frac{\partial H}{\partial p_\theta} dp_\theta + \frac{\partial H}{\partial p_z} dp_z = kz dz + \frac{p_\theta}{mR^2} dp_\theta + \frac{p_z}{m} dp_z, \quad (4.4)$$

co que das ecuacións (4.3) e (4.4) chegamos a que

$$X_H = \frac{p_\theta}{mR^2} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{p_z}{m} \frac{\partial}{\partial z} - kz \frac{\partial}{\partial p_z}. \quad (4.5)$$

Sexa agora $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow T^*M$ con $\alpha(t) = (\theta(t), z(t), p_\theta(t), p_z(t))$ unha curva integral de X_H , entón

$$X_H(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t) = \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial\theta} \Big|_{\alpha(t)} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{\alpha(t)} + \frac{dp_\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial p_\theta} \Big|_{\alpha(t)} + \frac{dp_z}{dt} \frac{\partial}{\partial p_z} \Big|_{\alpha(t)}. \quad (4.6)$$

Agora ben, de (4.5) e (4.6) obtemos

$$\begin{aligned} (1) \quad -\frac{dp_\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial\theta} = 0, & (2) \quad -\frac{dp_z}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z} = kz(t) \\ (3) \quad \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta(t)}{mR^2}, & (4) \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z(t)}{m} \end{aligned}$$

Das ecuacións (1) e (3) obtemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{cte}{mR^2}$$

e polo tanto $p_\theta = mR^2 \frac{d\theta}{dt} = cte$ expresa que o momento angular en torno ao eixo z é unha constante do movemento.

Por outro lado, das ecuacións (2) e (4) obtemos que

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = 0,$$

que expresa que o movemento na dirección z é harmónico simple.

4.3. Movement dunha partícula nun campo magnético

Consideremos unha partícula cargada que se move nun campo magnético. Sexa \mathbf{B} un campo de vectores (o campo magnético) en \mathbb{R}^3 cuxa expresión local vén dada por

$$\mathbf{B}(x^1, x^2, x^3) = B_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + B_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + B_3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

sendo B_1, B_2, B_3 funcións nas variables (x^1, x^2, x^3) . En electromagnetismo é costume supoñer $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

A *Lei da forza de Lorentz* para a partícula con carga e e masa m é

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{e}{c} v \times \mathbf{B} \quad (4.7)$$

onde

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$$

é a posición da partícula,

$$v(t) = (v^1(t), v^2(t), v^3(t)), \quad v^i(t) = \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_t$$

a súa velocidade, e c a velocidade da luz.

Dado que

$$v \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

a ecuación (4.7) é equivalente ás ecuacións

$$\begin{aligned} m \frac{dv^1}{dt} &= \frac{e}{c} (B_3 v^2 - B_2 v^3), \\ m \frac{dv^2}{dt} &= \frac{e}{c} (B_1 v^3 - B_3 v^1), \\ m \frac{dv^3}{dt} &= \frac{e}{c} (B_2 v^1 - B_1 v^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

O espazo de configuración é agora $M = \mathbb{R}^3$ e o espazo de fases $T^*M = T^*\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3)$.

Para a formulación hamiltoniana desta ecuación consideramos a forma simpléctica canónica de $T^*\mathbb{R}^3$

$$\omega = dx^1 \wedge dp_1 + dx^2 \wedge dp_2 + dx^3 \wedge dp_3$$

pero modificándoa da seguinte maneira.

O campo vectorial \mathbf{B} define unha única 2-forma pechada $B \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$:

$$B = i_{\mathbf{B}}(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

onde a matriz asociada a B é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Defínese a forma simpléctica magnética como

$$\omega_B = \omega - \frac{e}{c} \pi^* B$$

que é simpléctica por ser pechada e non dexenerada, xa que a súa matriz é

$$\begin{pmatrix} -B & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Sexa $H: T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o hamiltoniano do sistema dado por

$$H(x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

entón

$$dH = \frac{1}{m}(p_1 dp_1 + p_2 dp_2 + p_3 dp_3). \quad (4.9)$$

Consideramos a ecuación simpléctica

$$\omega_B(X_H, -) = dH \quad (4.10)$$

e escribimos X_H localmente como segue

$$X_H = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + a^3 \frac{\partial}{\partial x^3} + b_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial p_3}.$$

onde $a^1, a^2, a^3, b^1, b^2, b^3$ son funcións das coordenadas $(x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3)$.

Das ecuacións (4.9) e (4.10) obtemos que

$$a^i = p_i/m \quad (4.11)$$

e que

$$b_1 = \frac{e}{c}(B_3 a^2 - B_2 a^3) \quad b_2 = \frac{e}{c}(B_1 a^3 - B_3 a^1) \quad b_3 = \frac{e}{c}(B_2 a^1 - B_1 a^2). \quad (4.12)$$

Entón, se $\alpha(t) = (x^i(t), p_i(t))$ é curva integral de X_H , de (4.11) e (4.12) obtéñense as ecuacións (4.8), e polo tanto vemos que a Lei de Lorentz pódese escribir de forma xeométrica como a ecuación simpléctica (4.10).

Capítulo 5

Endomorfismos tanxentes en espazos vectoriais

Comezaremos o capítulo introducindo o concepto de estrutura tanxente nun espazo vectorial.

Definición 5.1. Sexa V un espazo vectorial de dimensión $2n$. Un endomorfismo

$$J : V \longrightarrow V$$

con $\text{rango } J = n$ e tal que

$$J^2 = J \circ J \equiv 0$$

denomínase *estrutura tanxente* en V .

Polo tanto temos que $\text{Im } J \subset \text{Ker } J$, e como

$$2n = \dim V = \dim \text{Ker } J + \dim \text{Im } J = \dim \text{Ker } J + n$$

dedúcese que $\text{Im } J = \text{Ker } J$.

Exemplo 5.2. Sexa $V = \mathbb{R}^{2n}$, definimos

$$\begin{aligned} J_e : \quad \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &\longmapsto J_e(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

onde temos que

$$\begin{aligned} J_e^2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= J_e \circ J_e(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \\ &= J_e(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

e

$$\text{Ker } J_e = \{(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n) / y_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Im } J_e = \{(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$$

é dicir, $\text{Ker } J_e = \text{Im } J_e$, e así $\text{rango } J_e = n$. Polo tanto J_e é unha estrutura tanxente en \mathbb{R}^{2n} , que denominamos a estrutura tanxente *canónica* de \mathbb{R}^{2n} .

Vexamos agora como podemos construír outra base do espazo vectorial utilizando esta estrutura J_e . Consideremos a base canónica de \mathbb{R}^{2n} $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$, entón

$$J_e(e_i) = J_e(0, \dots, \overbrace{1}^i, \dots, 0, \overbrace{0, \dots, 0}^n) = (\overbrace{0, \dots, 0}^n, 0, \dots, \overbrace{1}^{i+n}, \dots, 0) = e_{i+n}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$J_e(e_{i+n}) = J_e(\overbrace{0, \dots, 0}^n, 0, \dots, \overbrace{1}^{i+n}, \dots, 0) = (0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n$$

polo tanto, temos que $\{e_i, J_e(e_i)\}$ é tamén unha base de \mathbb{R}^{2n} .

Como $J_e(e_i) = 0 e_i + 1 e_{i+n}$ e $J_e(e_{i+n}) = 0 e_i + 0 e_{i+n}$, temos que a matriz asociada a J_e é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

e se x, y son dous vectores (calquera) en \mathbb{R}^{2n} , a expresión matricial de J_e respecto desta base é

$$J_e(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

De forma xeral, nun espazo vectorial V de dimensión par, cunha estrutura tanxente asociada J , sempre se poden considerar bases deste tipo.

Sexa H un subespazo complementario de $\text{Im } J = \text{Ker } J$ en V , é dicir,

$$V = H \oplus \text{Im } J = H \oplus \text{Ker } J,$$

entón tense que a restrición do endomorfismo J a H ,

$$J|_H : H \longrightarrow \text{Im } J = \text{Ker } J,$$

é un isomorfismo.

Polo tanto, se $\{e_i\}$ é unha base de H , entón $\{e_i, J_e(e_i)\}$ é unha base de V que denominamos *base adaptada* de V .

Considerando unha base adaptada, temos que

$$J(a^i e_i + b^i J_e(e_i)) = a^i J_e(e_i)$$

e polo tanto, a matriz de J respecto desta base é

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

e podemos escribir

$$J = J e_i \otimes e^i \tag{5.1}$$

onde $\{e^i\}$ é a base dual de $\{e_i\}$ en H .

Sexa H' outro subespazo complementario de $\text{Ker } J$ en V e $\{e'_i\}$ unha base de H' . Entón $\{e'_i, J e'_i\}$ é outra base de V e podemos escribir os seus elementos como combinación lineal dos elementos da base $\{e_i, J e_i\}$

$$\begin{aligned} e'_i &= A_i^j e_j + B_i^j J e_j \\ J e'_i &= A_i^j J e_j \end{aligned}$$

onde $A, B \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, sendo A non singular. Así, dúas bases adaptadas están relacionadas por unha matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix}.$$

O conxunto destas matrices

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \end{pmatrix} / A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}), B \in \text{gl}(n, \mathbb{R}) \right\}$$

é un subgrupo pechado G de $\text{Gl}(2n, \mathbb{R})$.

Este grupo pódese describir como o grupo de invarianza da matriz J_0 , isto é,

$$\alpha \in G \iff \alpha J_0 \alpha^{-1} = J_0.$$

O concepto de estrutura tanxente pode extenderse a variedades diferenciables. Este grupo G aparece na descrición das estruturas case tanxentes en variedades como certo tipo de G -estruturas (véxase [5]).

Capítulo 6

Xeometría do fibrado tanxente

O fibrado tanxente dunha variedade diferenciable ten unha estrutura, coñecida co nome de estrutura case tanxente canónica, que xoga un papel importante na descrición lagrangiana da Mecánica Analítica.

6.1. Estrutura diferenciable do fibrado tanxente

Nesta sección recordaremos as definicións e as principais propiedades dos obxectos xeométricos do fibrado tanxente dunha variedade diferenciable, que serán de utilidade na descrición xeométrica das ecuacións de Euler-Lagrange.

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n e sexa TM o seu fibrado tanxente. Vexamos que a estrutura diferenciable en M , descrita ao principio do capítulo 3, induce unha estrutura diferenciable en TM .

Sexa (U, φ) unha carta en M , onde U é un aberto en M e $\varphi : U \subseteq M \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo.

Como

$$\begin{aligned} \tau : TM &\longrightarrow M \\ v_p &\longmapsto p \end{aligned}$$

é a proxección canónica, consideremos o aberto $\tau^{-1}(U) = TU$ en TM e definimos a carta inducida $(\tau^{-1}(U), \tilde{\varphi})$, onde $\tilde{\varphi}$ é o difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : TU &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ v_p &\longmapsto ((\varphi \circ \tau)(v_p), dx^1(p)(v_p), \dots, dx^n(p)(v_p)) . \end{aligned}$$

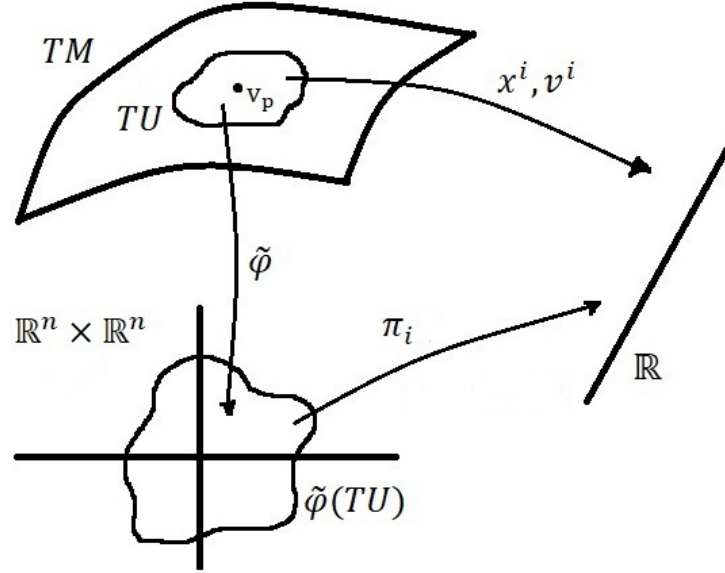
Entón, temos un sistema de coordenadas *canónicas* (x^i, v^i) en $TU \subseteq TM$ de forma que

$$\begin{aligned} x^i &= \pi_i \circ \tilde{\varphi}, & \forall i = 1, \dots, n \\ v^i &= \pi_{i+n} \circ \tilde{\varphi}, & \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

e polo tanto

$$x^i(v_p) = x^i(p), \quad v^i(v_p) = dx^i(p)(v_p) = v_p(x^i), \quad i = 1, \dots, n,$$

sendo $v_p \in TM$, $v_p = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$.



Da mesma forma, podemos considerar o espazo tanxente á variedade TM en cada punto e o seu espazo dual, construíndo así

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{v_p}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{v_p}, \frac{\partial}{\partial v^1} \Big|_{v_p}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n} \Big|_{v_p} \right\}$$

unha base para $T_{v_p}(TM)$ e

$$\{ dx^1(v_p), \dots, dx^n(v_p), dv^1(v_p), \dots, dv^n(v_p) \}$$

unha base para $T_{v_p}^*(TM)$.

Observemos que

$$\tau_*(v_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{v_p} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \tau_*(v_p) \left(\frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p} \right) = 0_p,$$

sendo

$$\tau_*(v_p) : T_{v_p}(TM) \longrightarrow T_pM$$

a diferencial de τ no punto v_p . Denomínanse vectores *verticais* aos vectores cuxas únicas compoñentes son as derivadas parciais con respecto ás coordenadas v^i e, polo tanto, se proxectan por τ_* no vector cero.

A continuación introducimos un dos obxectos xeométricos importantes do fibrado tangente dunha variedade diferenciable, que é o campo de vectores de Liouville.

6.2. Campo de vectores de Liouville

Consideremos un punto v_p na variedade TM e a curva

$$\begin{aligned} \alpha_{v_p} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto \alpha_{v_p}(t) = e^t v_p \end{aligned}$$

que pasa por v_p en tempo 0, é dicir, $\alpha_{v_p}(0) = v_p$.

Definición 6.1. Defínese o *campo de vectores de Liouville* $\Delta \in \mathfrak{X}(TM)$ da seguinte forma

$$\Delta(v_p) = \dot{\alpha}_{v_p}(0) \in T_{v_p}(TM).$$

Supoñamos que v_p se escribe como

$$v_p = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

entón localmente temos

$$\begin{aligned} \alpha_{v_p} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto \alpha_{v_p}(t) = (x^i(e^t v_p), v^i(e^t v_p)) = (x^i(p), e^t a^i), \end{aligned}$$

e polo tanto

$$\begin{aligned} \Delta(v_p) &= \dot{\alpha}_{v_p}(0) = \frac{dx^i(p)}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{v_p} + \frac{d(e^t a^i)}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p} \\ &= 0 \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{v_p} + a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p} = v^i(v_p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p}, \end{aligned}$$

é dicir, a expresión local do campo de vectores de Liouville en coordenadas canónicas é

$$\Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (6.1)$$

Observación 6.2. O campo de vectores de Liouville Δ sobre TM é o xerador infinitesimal do grupo 1-paramétrico de transformacións dado por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} \times TM &\longrightarrow TM \\ (t, v_p) &\longmapsto \alpha(t, v_p) = e^t v_p. \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.3. Levantamento vertical de campos de vectores

Tendo en conta a estrutura de espazo vectorial que posee cada fibra T_pM do fibrado tanxente TM , defínense os levantamentos verticais de campos de vectores en M a campos de vectores en TM .

Sexa $x_p \in T_pM$ un vector tanxente (fixo) a M no punto $p \in M$. Para cada $v_p \in T_pM$ consideramos a curva

$$\begin{aligned} \alpha_{x_p} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto \alpha_{x_p}(t) = v_p + t x_p \end{aligned}$$

que verifica, evidentemente, que $\alpha_{x_p}(0) = v_p$.

Definición 6.3. Chámase *levantamento vertical* de x_p a TM no punto $v_p \in TM$ ao vector tanxente

$$[x_p]^V(v_p) = \dot{\alpha}_{x_p}(0) = \left. \frac{d(v_p + t x_p)}{dt} \right|_{t=0} \in T_{v_p}(TM).$$

Pódese probar que $[x_p]^V(v_p)$ é vertical considerando a seguinte identidade

$$\tau_*(v_p)([x_p]^V(v_p)) = \tau_*(v_p)(\dot{\alpha}_{x_p}(0)) = (\tau \circ \dot{\alpha}_{x_p})(0) = 0,$$

xa que

$$\begin{array}{ccccc} I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha_{x_p}} & TM & \xrightarrow{\tau} & M \\ t & \longmapsto & \alpha_{x_p}(t) = v_p + t x_p & \longmapsto & p \end{array}$$

Calculemos agora a súa expresión local. Se x_p e v_p son elementos tales que se escriben da forma

$$x_p = a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \quad v_p = b^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

como a expresión local da curva α_{x_p} é

$$\begin{aligned} \alpha_{x_p} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto \alpha_{x_p}(t) = v_p + t x_p = (x^i(p), b^i + t a^i), \end{aligned}$$

dedúcese que

$$\begin{aligned} [x_p]^V(v_p) &= \dot{\alpha}_{x_p}(0) = \left. \frac{dx^i(p)}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{v_p} + \left. \frac{d(b^i + t a^i)}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial v^i} \right|_{v_p} \\ &= 0 \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{v_p} + a^i \left. \frac{\partial}{\partial v^i} \right|_{v_p} = a^i \left. \frac{\partial}{\partial v^i} \right|_{v_p}. \end{aligned}$$

Observemos que localmente

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i} \right]^V = \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

6.4. Estructura tanxente canónica en TM

O levantamento vertical de campos de vectores a TM permítenos construír o seguinte campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre TM .

Consideremos o vector $Z_{v_p} \in T_{v_p}(TM)$, entón como

$$\begin{aligned} \tau : TM &\longrightarrow M \\ v_p &\longmapsto \tau(v_p) = p \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \tau_*(v_p) : T_{v_p}(TM) &\longrightarrow T_p M \\ Z_{v_p} &\longmapsto \tau_*(v_p)(Z_{v_p}). \end{aligned}$$

Polo tanto, podemos considerar o levantamento vertical

$$[\tau_*(v_p)(Z_{v_p})]^V$$

no punto v_p e definir o endomorfismo

$$J(v_p) : T_{v_p}(TM) \longrightarrow T_{v_p}(TM)$$

da seguinte maneira

$$J(v_p)(Z_{v_p}) = [\tau_*(v_p)(Z_{v_p})]^V(v_p), \quad (6.3)$$

En coordenadas canónicas, a súa expresión local é

$$J(v_p) = \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p} \otimes dx^i(v_p), \quad (6.4)$$

xa que aplicando a definición de $J(v_p)$ aos vectores da base, obtemos

$$\begin{aligned} J(v_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{v_p} \right) &= \left(\tau_*(v_p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{v_p} \right) \right)^V(v_p) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right)^V(v_p) = \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p}, \\ J(v_p) \left(\frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p} \right) &= \left(\tau_*(v_p) \left(\frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p} \right) \right)^V(v_p) = [0_p]^V(v_p) \equiv 0_{v_p}, \end{aligned}$$

e así a matriz de J con respecto ás bases coordenadas é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

O endomorfismo

$$J(v_p) : T_{v_p}(TM) \longrightarrow T_{v_p}(TM)$$

ten rango $J(v_p) = n$ e verifica que

$$J(v_p)^2 = J(v_p) \circ J(v_p) \equiv 0,$$

polo tanto é unha estrutura tanxente en $T_{v_p}(TM)$. Por esta razón o campo de tensores de tipo $(1,1)$, con expresión local (6.4), recibe o nome de *estrutura tanxente canónica* do fibrado tanxente TM .

6.5. Forma simpléctica en TM

Denomínase función lagrangiana a calquera función $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable definida en TM . Sexa unha tal función L , podemos considerar a 1-forma diferencial $\theta_L \in \Omega^1(TM)$ definida como

$$\theta_L = dL \circ J \tag{6.5}$$

isto é, dado un punto v_p , temos a seguinte composición de funcións

$$\theta_L(v_p) : T_{v_p}(TM) \xrightarrow{J(v_p)} T_{v_p}(TM) \xrightarrow{dL(v_p)} \mathbb{R}.$$

A partir de θ_L , defínese a 2-forma diferencial $\omega_L \in \Omega^2(TM)$ como segue

$$\omega_L = -d\theta_L, \tag{6.6}$$

que resulta evidente que é pechada, posto que

$$d\omega_L = d(-d\theta_L) = 0.$$

En coordenadas canónicas (x^i, v^i) , da ecuación (6.4) obtemos que as expresións locais de θ_L e ω_L son

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i \tag{6.7}$$

e

$$\begin{aligned} \omega_L = -d\theta_L &= dx^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = dx^i \wedge \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)}{\partial v^j} dv^j \right) \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} dx^i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dx^i \wedge dv^j. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Vexamos agora cando ω_L é non dexenerada, e polo tanto, unha forma simpléctica.

Definición 6.4. Dese que unha función lagrangiana $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é *regular* se a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \end{pmatrix}$$

é non singular, é dicir, o seu determinante é distinto de cero. En caso contrario, dese que o lagrangiano é *singular*.

O carácter xeométrico do concepto de regularidade témolo na seguinte proposición.

Proposición 6.5. *As seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é un lagrangiano regular.
2. ω_L é unha forma non dexenerada.

Demostración. A matriz de ω_L é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} & \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \\ -\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} & & 0 \end{pmatrix}$$

e polo tanto, ω_L é non dexenerada se e só se L é regular. □

6.6. Ecuacións de Euler-Lagrange

Outro concepto importante na formulación xeométrica das ecuacións de Euler-Lagrange é o de enerxía, que introducimos a continuación.

Definición 6.6. Sexa $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular, defínese a *función enerxía* E_L da seguinte forma

$$E_L = \Delta(L) - L,$$

onde Δ é o campo de vectores de Liouville descrito na sección anterior.

Vexamos de onde provén este termo *enerxía*. Supoñamos que estamos nun sistema conservativo con enerxía potencial V , que sabemos que só depende das coordenadas x^i , e enerxía cinética T dada por

$$T(x^i, v^i) = \frac{1}{2} m_i (v^i)^2.$$

O lagrangiano do sistema é

$$L(x^i, v^i) = T(x^i, v^i) - V(x^i)$$

e polo tanto, facendo

$$\Delta(L) - L = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L = \frac{1}{2} m_i (v^i)^2 + V(x^i)$$

obtemos que $\Delta(L) - L$ se corresponde coa enerxía total do sistema.

A continuación describiremos a formulación lagrangiana das ecuacións de Euler-Lagrange. Sexa $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular e así ω_L non dexenerada, consideremos o isomorfismo de módulos

$$\begin{aligned} \flat_L : \mathfrak{X}(TM) &\longrightarrow \Omega^1(TM) \\ X &\longmapsto \flat(X) = \omega_L(X, -) = i_X \omega_L \end{aligned}$$

que leva campos de vectores en TM en 1-formas en TM , e o correspondente isomorfismo inverso

$$\sharp_L : \Omega^1(TM) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM).$$

Como a diferencial da función enerxía $dE_L \in \Omega^1(TM)$, existe un único campo de vectores $X_L \in \mathfrak{X}(TM)$ asociado á función L que é solución da ecuación

$$i_{X_L} \omega_L = \omega_L(X_L, -) = dE_L. \quad (6.9)$$

Considerando o sistema de coordenadas canónicas (x^i, v^i) en TM , pódese escribir X_L da forma

$$X_L = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

e ω_L como

$$\omega_L = M_{ij} dx^i \wedge dx^j + N_{ij} dx^i \wedge dv^j$$

onde

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i}, \quad N_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i},$$

obtemos

$$\begin{aligned} i_{X_L} \omega_L &= i_{X_L} (M_{ij} dx^i \wedge dx^j + N_{ij} dx^i \wedge dv^j) \\ &= M_{ij} i_{X_L} (dx^i \wedge dx^j) + N_{ij} i_{X_L} (dx^i \wedge dv^j) \\ &= M_{ij} (i_{X_L} (dx^i) dx^j - dx^i i_{X_L} (dx^j)) \\ &\quad + N_{ij} (i_{X_L} (dx^i) dv^j - dx^i i_{X_L} (dv^j)) \\ &= M_{ij} (A^i dx^j - dx^i A^j) + N_{ij} (A^i dv^j - dx^i B^j) \\ &= (M_{ik} A^i - M_{kj} A^j - N_{kj} B^j) dx^k + (N_{ik} A^i) dv^k \\ &= ((M_{ik} - M_{ki}) A^i - N_{kj} B^j) dx^k + (N_{ik} A^i) dv^k. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Por outro lado, como a expresión local de E_L vén dada por

$$E_L = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L \quad (6.11)$$

a súa diferencial é

$$\begin{aligned} dE_L &= \frac{\partial E_L}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial E_L}{\partial v^k} dv^k = \left(v^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^k} \right) dx^k \\ &+ \left(\frac{\partial L}{\partial v^k} + v^i \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial v^k} \right) dv^k \\ &= \left(v^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^k} \right) dx^k + v^i \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial v^i} dv^k. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Entón, de (6.10) e (6.12) temos que X_L é solución da ecuación (6.9) se e só se as funcións $A^i(x^i, v^i)$ e $B^i(x^i, v^i)$ satisfán o sistema de ecuacións

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} \right) A^i - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} B^j &= v^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} - \frac{\partial L}{\partial x^i}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} A^i &= \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} v^i. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Se o lagrangiano é regular, as ecuacións anteriores son equivalentes ás seguintes ecuacións

$$A^i = v^i \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} B^j = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad (6.14)$$

Entón, se o lagrangiano é regular, temos que X_L é solución da ecuación (6.9) se e só se as funcións A^i e B^i satisfán o sistema de ecuacións (6.14).

Supoñamos que o lagrangiano é regular, e consideremos unha curva integral $\phi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ do campo de vectores X_L cuxa expresión local é $\phi(t) = (\phi^i(t), \phi_i(t))$, é dicir,

$$x^i(\phi(t)) = \phi^i(t), \quad v^i(\phi(t)) = \phi_i(t).$$

Se avaliamos X_L en $\phi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} X_L(\phi(t)) &= A^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(t)} + B^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\phi(t)} \\ &= \phi_i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(t)} + B^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\phi(t)}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

xa que $A^i(\phi(t)) = v^i(\phi(t)) = \phi_i(t)$.

Por outro lado, como

$$\dot{\phi}(t) = \frac{d\phi^i}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\phi(t)} + \frac{d\phi_i}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\phi(t)},$$

temos que $\phi(t)$ é unha curva integral de X_L , isto é,

$$X_L(\phi(t)) = \dot{\phi}(t),$$

se e só se

$$\frac{d\phi^i}{dt} \Big|_t = \phi_i(t), \quad B^i \left(\phi^j(t), \frac{d\phi^j}{dt} \Big|_t \right) = \frac{d^2\phi^i}{dt^2}. \quad (6.16)$$

Obsérvese que $\phi(t)$ é o levantamento tanxente da curva

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (\tau \circ \phi)(t) = (\phi^i(t)) \end{aligned}$$

é dicir,

$$\phi(t) = \dot{\alpha}(t) = \left(\phi^i(t), \frac{d\phi^i}{dt} \Big|_t \right),$$

entón, $\phi(t)$ é unha curva integral de X_L se e só se $\alpha(t) = (\tau \circ \phi)(t) = (\phi^i(t))$ é solución da segunda ecuación de (6.16).

Agora, tendo en conta as ecuacións (6.16), avaliamos (6.14) en

$$\phi(t) = \dot{\alpha}(t)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} \Big|_{\phi(t)} &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} v^j(\phi(t)) + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} B^j(\phi(t)) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} \phi_j(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} B^j(\phi(t)) \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} \Big|_{\phi(t)} \frac{d\phi^j}{dt} \Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \Big|_{\phi(t)} \frac{d^2\phi^i}{dt^2} \Big|_t. \end{aligned}$$

Polo tanto, se $\phi(t) = \dot{\alpha}(t)$ é unha curva integral de X_L , entón

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} \frac{d\phi^j}{dt} \Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} \frac{d^2\phi^i}{dt^2} \Big|_t = \frac{\partial L}{\partial x^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)}$$

é dicir, a curva $\alpha(t)$ é solución das ecuacións de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

A modo de resumo, temos a seguinte proposición.

Proposición 6.7. *Sea L un lagrangiano regular e X_L o campo de vectores solución da ecuación*

$$i_{X_L}\omega_L = \omega_L(X_L, -) = dE_L,$$

entón as curvas integrais de X_L son levantamentos tanxentes de curvas en M que son solucións das ecuacións de Euler-Lagrange determinadas por L .

6.7. A aplicación de Legendre

Definición 6.8. Se $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función lagrangiana, a aplicación

$$\begin{aligned} FL : TM &\longrightarrow T^*M \\ v_p &\longmapsto FL(v_p) : T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

definida por

$$(FL(v_p))(w_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v_p + tw_p)$$

onde $v_p, w_p \in TM$, denomínase *aplicación de Legendre* de L .

Se

$$v_p = a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \quad w_p = b^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

en coordenadas canónicas temos

$$\begin{array}{ccccc} I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & TM & \xrightarrow{L} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (x^i, a^i + tb^i) & \longmapsto & L(x^i, a^i + tb^i), \end{array}$$

entón

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v_p + tw_p) = \left. \frac{\partial L}{\partial x^i} \right|_{v_p} \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial v^i} \right|_{v_p} \left. \frac{d(a^i + tb^i)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial L}{\partial v^i} \right|_{v_p} b^i$$

e polo tanto

$$FL(v_p) = \left. \frac{\partial L}{\partial v^i} \right|_{v_p} dx^i(p),$$

do que se deduce que a expresión local de FL é

$$FL(x^i, v^i) = \left(x^i, \frac{\partial L}{\partial v^i} \right). \quad (6.17)$$

Proposición 6.9. *As seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é un lagrangiano regular.
2. $FL : TM \rightarrow T^*M$ é un difeomorfismo local.

Demostración. A matriz xacobiana de FL ten a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} I_n & (*) \\ 0 & \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \right) \end{pmatrix},$$

e polo tanto FL é difeomorfismo local se e só se a matriz $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \right)$ é non singular, é dicir, se e só se L é regular. \square

A aplicación de Legendre é unha ferramenta matemática frecuentemente empregada en Mecánica Clásica, Mecánica Estadística e Termodinámica.

As formulacións hamiltoniana e lagrangiana da Mecánica Clásica que describimos anteriormente están relacionadas a través da aplicación de Legendre.

Proposición 6.10. *Se ω é a forma simpléctica canónica do fibrado cotanxente T^*M e $\omega_L \in \Omega^2(TM)$ é a 2-forma lagrangiana, correspondente ao lagrangiano regular L , entón verifícase*

$$FL^* \omega = \omega_L, \quad (6.18)$$

sendo FL^* o pullback de FL .

Demostración. Utilizando as expresións locais (3.2), (6.8) e (6.17), obtemos

$$\begin{aligned} FL^* \omega &= FL^*(dx^i \wedge dp_i) = (FL^* dx^i) \wedge (FL^* dp_i) \\ &= d(x^i \circ FL) \wedge d(p_i \circ FL) = dx^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = \omega_L, \end{aligned}$$

polo que queda probada a proposición. \square

Observación 6.11. No caso en que $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ sexa un lagrangiano hiperregular, é dicir, $FL : TM \rightarrow T^*M$ sexa un difeomorfismo global, pódese probar a partir de (6.18) que $FL_* X_L = X_H$, sendo $H = E_L \circ FL^{-1}$.

Polo tanto, se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ é unha curva integral de X_L (solución das ecuacións de Euler-Lagrange), entón $\beta = FL \circ \alpha$ é unha curva integral de X_H (solución das ecuacións de Hamilton).

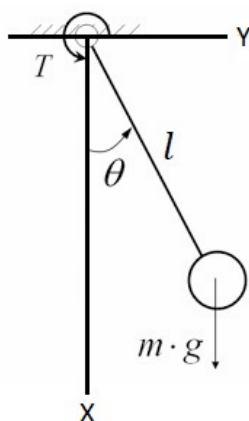
Capítulo 7

Exemplos da formulación lagrangiana

O noso obxectivo é utilizar a formulación xeométrica descrita no capítulo anterior para obter as ecuacións do movemento do péndulo simple e dunha partícula obrigada a moverse sobre a superficie dun cono. Podería facerse dunha maneira máis directa utilizando as ecuacións de Euler-Lagrange na física, pero usaremos o formalismo matemático para unha mellor comprensión da teoría vista nos dous capítulos anteriores.

7.1. Péndulo simple

Consideremos unha partícula de masa m que colga dun soporte mediante unha corda, de masa despreziable e lonxitude l , nun campo gravitacional. Supoñamos que o eixo Z é perpendicular ao “papel” e que a masa, que se move no plano XY , se atopa desviada un ángulo θ da posición de equilibrio.



Neste caso, M é a semicircunferencia

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = l^2, x < 0, z = 0\},$$

que se a expresamos en función do ángulo θ temos

$$M = \{(l \cos \theta, l \sin \theta, 0) / \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\}.$$

Polo tanto, as posibles posicións da partícula quedan determinadas por θ e as coordenadas en TM son (θ, v_θ) .

O lagrangiano do sistema neste exemplo é

$$\begin{aligned} L : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, v_\theta) &\longmapsto L(\theta, v_\theta) = T - V = \frac{1}{2} m l^2 v_\theta^2 + m g \cos \theta, \end{aligned}$$

que é a enerxía cinética menos a enerxía potencial.

Facendo as derivadas parciais de L obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g l \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial v_\theta} = m l^2 v_\theta,$$

entón a 1-forma de Liouville θ_L (véxase (6.7)) vén dada por

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial v_\theta} d\theta = m l^2 v_\theta d\theta$$

e polo tanto, a 2-forma lagrangiana ω_L é

$$\omega_L = -d\theta_L = -d(m l^2 v_\theta d\theta) = m l^2 d\theta \wedge dv_\theta.$$

A función enerxía $E_L = \Delta(L) - L$ (véxase (6.11)) neste caso é

$$E_L = v_\theta \frac{\partial L}{\partial v_\theta} - L = v_\theta^2 m l^2 - \left(\frac{1}{2} m l^2 v_\theta^2 - m g l \cos \theta \right) = \frac{1}{2} m l^2 v_\theta^2 + m g l \cos \theta$$

e a súa diferencial

$$dE_L = m g l \sin \theta d\theta + m l^2 v_\theta dv_\theta. \quad (7.1)$$

Sexa X_L o único campo de vectores en TM solución da ecuación

$$i_{X_L} \omega_L = \omega_L(X_L, -) = dE_L,$$

cuxa expresión local se pode escribir como

$$X_L = a \frac{\partial}{\partial \theta} + b \frac{\partial}{\partial v_\theta},$$

onde a e b son funcións das coordenadas (θ, v_θ) . Entón

$$\begin{aligned} i_{X_L} \omega_L &= i_{X_L} (m l^2 d\theta \wedge dv_\theta) = m l^2 (d\theta(X_L) dv_\theta - dv_\theta(X_L) d\theta) \\ &= m l^2 (a dv_\theta - b d\theta) = m l^2 a dv_\theta - m l^2 b d\theta. \end{aligned} \quad (7.2)$$

De (7.1) e (7.2) obtemos que

$$a = v_\theta \quad , \quad b = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta$$

e así

$$X_L = v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial v_\theta} .$$

Sexa $\phi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ con $\phi(t) = (\theta(t), v_\theta(t))$ unha curva integral de X_L , entón

$$X_L(\phi(t)) = v_\theta(t) \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\phi(t)} - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta(t) \frac{\partial}{\partial v_\theta} \Big|_{\phi(t)} \quad (7.3)$$

e por outro lado

$$X_L(\phi(t)) = \dot{\phi}(t) = \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\phi(t)} + \frac{dv_\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial v_\theta} \Big|_{\phi(t)} . \quad (7.4)$$

De (7.3) e (7.4) deducimos que

$$v_\theta(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = \frac{dv_\theta}{dt}$$

é dicir, o movemento da partícula $\theta(t)$ queda determinado pola ecuación diferencial

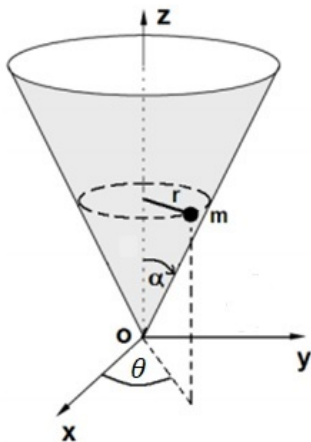
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta .$$

7.2. Movemento dunha partícula nun cono

Consideremos unha partícula de masa m obrigada a moverse sobre a superficie dun cono recto con ángulo de amplitude α . A partícula está sometida a unha forza gravitacional. Consideremos unha parametrización do cono dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &: (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \longrightarrow M \\ (\theta, r) &\longmapsto \mathbb{X}(\theta, r) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, r \cotg \alpha) , \end{aligned}$$

a cal cobre todo o cono menos o caso $\theta = 0 = 2\pi$.



Se facemos como no exemplo do cilindro do capítulo 4 e consideramos outra parametrización

$$\begin{aligned} \tilde{X} &: (-\pi, \pi) \times (0, +\infty) \longrightarrow M \\ (\theta, r) &\longmapsto \tilde{X}(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r \cotg \alpha), \end{aligned}$$

xa teríamos cuberto o caso $\theta = 0$.

Como a amplitude α é constante, para simplificar os cálculos imos supoñer que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e así, $\cotg \frac{\pi}{4} = 1$. Agora ben, as coordenadas en M e en TM son

$$(x^1, x^2) = (\theta, r) \quad (x^1, x^2, v^1, v^2) = (\theta, r, v_\theta, v_r).$$

O lagrangiano do sistema neste exemplo é

$$L(\theta, r, v_\theta, v_r) = \frac{1}{2} m (2 v_r^2 + r^2 v_\theta^2) - m g r.$$

Facendo as derivadas parciais de L obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial L}{\partial r} &= m r v_\theta^2 - m g \\ \frac{\partial L}{\partial v_\theta} &= m v_\theta r^2 & \frac{\partial L}{\partial v_r} &= 2 m v_r \end{aligned}$$

entón a 1-forma de Liouville θ_L (véxase(6.7)) vén dada por

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial v_\theta} d\theta + \frac{\partial L}{\partial v_r} dr = m v_\theta r^2 d\theta + 2 m v_r dr,$$

e polo tanto, a 2-forma lagrangiana ω_L é

$$\omega_L = -d\theta_L = -d(m v_\theta r^2 d\theta) - d(2 m v_r dr) = 2 m r v_\theta d\theta \wedge dr + m r^2 d\theta \wedge dv_\theta + 2 m dr \wedge dv_r .$$

A función enerxía $E_L = \Delta(L) - L$ (véxase (6.11)) neste caso é

$$\begin{aligned} E_L &= v_\theta \frac{\partial L}{\partial v_\theta} + v_r \frac{\partial L}{\partial v_r} - L = m r^2 v_\theta^2 + 2 m v_r^2 - \frac{1}{2} m (2 v_r^2 + r^2 v_\theta^2) + m g r \\ &= m v_r^2 + \frac{1}{2} m r^2 v_\theta^2 + m g r \end{aligned}$$

e a súa diferencial

$$dE_L = (m v_\theta^2 r + g) dr + m r^2 v_\theta dv_\theta + 2 m v_r dv_r . \quad (7.5)$$

Sexa X_L o único campo de vectores en TM solución da ecuación

$$i_{X_L} \omega_L = \omega_L(X_L, -) = dE_L ,$$

cuxa expresión local pode escribirse da forma

$$X_L = a \frac{\partial}{\partial \theta} + b \frac{\partial}{\partial r} + c \frac{\partial}{\partial v_\theta} + d \frac{\partial}{\partial v_r}$$

onde a , b , c e d son funcións das coordenadas $(\theta, r, v_\theta, v_r)$. Entón, procedendo da mesma forma que no exemplo anterior, obtemos

$$i_{X_L} \omega_L = (-2 b m r v_\theta - c m r^2) d\theta + (2 a m r v_\theta - 2 d m) dr + a m r^2 dv_\theta + 2 b m dv_r . \quad (7.6)$$

Agora ben, de (7.5) e (7.6) chegamos a que

$$a = v_\theta \quad , \quad b = v_r \quad , \quad c = \frac{-2 v_r v_\theta}{r} \quad , \quad d = \frac{r v_\theta^2 - g}{2}$$

e así

$$X_L = v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2 v_r v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial v_\theta} + \frac{r v_\theta^2 - g}{2} \frac{\partial}{\partial v_r} .$$

Sexa $\phi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ con $\phi(t) = (\theta(t), r(t), v_\theta(t), v_r(t))$ unha curva integral de X_L , entón

$$X_L = v_\theta(t) \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\phi(t)} + v_r(t) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\phi(t)} - \frac{2 v_r(t) v_\theta(t)}{r(t)} \frac{\partial}{\partial v_\theta} \Big|_{\phi(t)} + \frac{r(t) (v_\theta(t))^2 - g}{2} \frac{\partial}{\partial v_r} \Big|_{\phi(t)} \quad (7.7)$$

e por outro lado

$$X_L(\phi(t)) = \dot{\phi}(t) = \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\phi(t)} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\phi(t)} + \frac{dv_\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial v_\theta} \Big|_{\phi(t)} + \frac{dv_r}{dt} \frac{\partial}{\partial v_r} \Big|_{\phi(t)}. \quad (7.8)$$

De (7.7) e (7.8) deducimos que

$$\begin{aligned} v_\theta &= \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad -\frac{2v_r v_\theta}{r} = \frac{dv_\theta}{dt} \\ v_r &= \frac{dr}{dt} \quad , \quad \frac{r v_\theta^2 - g}{2} = \frac{dv_r}{dt} \end{aligned}$$

e chegamos as seguintes ecuacións

$$\begin{cases} r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} = 0 \implies m r^2 \frac{d\theta}{dt} = cte \\ \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2} r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} g = 0 \end{cases}$$

onde a primeira expresa a conservación do momento angular ao redor do eixo z e a segunda é a ecuación do movemento para a coordenada r .

Bibliografía

- [1] Abraham, R., and Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*, second edition, revised, enlarged, reset. Benjamin/Cummings, Reading, 1978.
- [2] Berger, M., Gauduchon, P., Mazet, E., *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [3] Cannas Da Silva, A., *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.
- [4] Curtis, W. D., and Miller, F. R., *Differential manifolds and theoretical physics*, Academic Press, INC 1985.
- [5] De León, M., Rodrigues, P.R. *Methods of differential geometry in analytical mechanics*, North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [6] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1959.
- [7] Libermann, P., and C-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Kluwer Academic 1987
- [8] Ratiu, T. S., Tudoran, R., Sbano, L., Dias, E., and Terra, G., A Crash Course in Geometric Mechanics, *Geometric Mechanics and Symmetry: The Peyresq Lectures*, In Montaldi, J. and Ratiu, T. (Eds.), 2005.
- [9] Weyl, H., *The Classical Groups: their invariants and representations*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1939.