



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Algunhas aplicacións do análise funcional á teoría fundamental de EDO e outras ecuacións funcionais

Alumno: Daniel Pais Romero

Titora: M. Victoria Otero Espinar

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

**Algunhas aplicacións do análise
funcional á teoría fundamental de
EDO e outras ecuacións funcionais**

Área: Análise matemática

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Algunhas aplicacións do análise funcional á teoría fundamental de EDO e outras ecuacións funcionais
Breve descrición do contido
Preténdese expor algunhas ideas sobre a resolución de ecuacións funcionais (entre elas, ecuacións diferenciais, ecuacións integrais e outras) baseadas na consideración de certas clases de funcións como espazos abstractos cuxos elementos son as propias funcións.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VI
Introdución	IX
1. Aplicación dos espazos funcionais a teoría das ecuacións diferenciais	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Teoremas de punto fixo	4
1.2.1. Método das aproximacións sucesivas	5
1.2.2. Os teoremas de Brouwer e de Schauder	8
1.3. Aplicación ao problema do valor inicial: existencia, unicidade e dependencia continua	9
1.3.1. Demostración do teorema de existencia e unicidade	9
1.3.2. Demostración do teorema de existencia de Peano	12
1.4. A cuestión da diferenciabilidade	13
1.5. Extremos locais	17
1.6. Teorema da función implícita	18
2. Aplicación dos espazos funcionais a teoría das ecuacións integrais	23
2.1. Operadores integrais	23
2.2. Ecuacións integrais de tipo compacto	24
2.3. Núcleo resolvente	26
2.4. Resolución do caso dexenerado	27
2.5. Método iterativo	28
2.6. Método dos determinantes de Fredholm	30
2.6.1. Ecuacións de Volterra	31
2.7. Ecuacións de tipo simétrico	32

3. Aplicacións a problemas da vida real	35
3.1. Aplicación do método das aproximacións sucesivas	35
3.2. Método de Newton-Raphson	36
3.3. Problemas de optimización	37
3.4. A braquistocrona	39
3.5. A ecuación de renovación	41
3.6. A ecuación loxística con memoria	43
Bibliografía	45

Resumo

Resumo

A análise matemática proporciona ferramentas para tratar certas cuestións sobre as ecuacións funcionais. Empréganse moito conceptos como converxencia, derivabilidade,... No primeiro capítulo, vése como, a partir dunha ecuación, chegar a unha solución equivale a atopar puntos fixos, bótando man de métodos iterativos, como o método das aproximacións sucesivas para atopalos. Ademáis, defínense termos como a diferenciabilidade, e trátanse resultados relacionados con ela como o problema do valor inicial.

No seguinte capítulo, trabállase coas ecuacións integrais, e abórdanse varias formas para solucionarlas, xa sexa con series ou empregando sistemas. Cabe destacar, que unha ecuación integral pode transformarse nunha diferencial, polo tanto, resolver ecuacións integrais, é útil para solucionar ecuacións funcionais en xeneral.

No derradeiro capítulo, veranse algúns exemplos de ecuacións funcionais, vendo onde aparecen na vida real. Moitos destes exemplos englobanse nos campos da física ou da estadística, aínda que como sucede coas matemáticas en xeneral, abarcan todos os campos.

Resumen

El análisis matemático proporciona ciertas herramientas para tratar ciertas cuestiones sobre las ecuaciones funcionales. Se usarán mucho conceptos como convergencia, derivabilidad,..

En el primer capítulo, se verá como, a partir de una ecuación, llegar a una solución equivale a encontrar puntos fijos, echando mano de métodos iterativos, como el método de las aproximaciones sucesivas para hallarlos. Además, se definen términos como la diferenciabilidad, y se tratan resultados relacionados con ella como el problema del valor inicial.

En el siguiente capítulo, se trabajará con ecuaciones integrales, y se abordarán varias formas para solucionarlas, ya sea con series o usando sistemas. Cabe destacar, que una ecuación integral, se puede transformar en una diferencial, por lo tanto, resolver ecuaciones integrales, es de utilidad para solucionar ecuaciones funcionales en general.

En el último capítulo, se verán algunos ejemplos de ecuaciones funcionales, viendo donde aparecen en la vida real. Muchos de estos ejemplos, se engloban en los campos de la física o de la estadística, aunque como sucede con las matemáticas en general, abarcan todos los campos.

Summary

Mathematic analysis gives tools to treat certain questions about functional equations. They will be used many terms like convergence, derivability, ..

First chapter, it will see how, with a equation, arrive to a solution means find fixed points, using iterative methods, such as the method of successive approximations. In addition, they are defined terms such as differentiation, and results related to it as the problem of the initial value.

In the next chapter, it will work with the integral equations, and it will find several paths to solve them, such as sums or using systems. It should be noted that an integral equation can be transformed into a differential, therefore it focused how to look for solutions of a functional equation in general.

In the last chapter, it will see some examples of integral equations, seeing where they happened in the daily life. Many of these examples are included in the fields of physics or statistics, although, as usually happens with maths, they can be seen in all the domains.

Introdución

A análise matemática é unha rama da matemática, especificamente da análise, que trata o estudo de espazos de funcións. Ten as súas raíces históricas no estudio de transformacións tales como a transformacións de Fourier e no estudio de ecuacións integrais e diferenciais. Vamos a ver algunhas ideas sobre a resolución de ecuacións funcionais. Traballaremos con certas clases de funcións como espazos abstractos cuxos elementos serán as propias funcións. Cabe destacar que a consideración das funcións como variables independentes provén da xeometría grega e o tratamento sistemático da análise funcional comeza a finais do século XIX. Dentro do ámbito das funcións, distinguimos varios aspectos:

- cuestións operativas, nas que prima a idea de encontrar solucións explícitas dos problemas tratados.
- aspectos topolóxicos, nos que se tratan conceptos como converxencia puntual ou converxencia uniforme. Un exemplo destes problemas é se a aplicación de métodos aproximados leva á solución.

Procederemos moitas veces por analogía cos campos numéricos, dónde os resultados son máis sinxelos de ver (por medio de la intuición xeométrica por exemplo)

Para introducir os espazos de funcións, situámonos en marcos suficientemente xerais como son os espazos métricos ou os espazos normados.

Un espazo métrico consiste nun par formado por un espazo e unha distancia (aplicación de $X \times X$ en \mathbb{R} que verifica as propiedades de positividade, simetría e a desigualdade triangular) e por outra parte un espazo normado é un espazo vectorial dotado dunha norma, isto é unha aplicación do espazo vectorial en \mathbb{R} , verificando as propiedades de positividade, homoxeneidade y desigualdade triangular. Como sabemos estes conceptos están moi relacionados dado que a partir dunha norma podemos definir unha distancia.

Vistos os espazos onde imos traballar; trataremos resultados relacionados coa diferenciabilidade no primeiro capítulo, resultados relacionados coa integrabilidade no segundo capítulo e outras cuestións máis relacionadas coa vida cotidiá no terceiro e derradeiro capítulo.

Capítulo 1

Aplicación dos espacios funcionais a teoría das ecuacións diferenciais

1.1. Preliminares

Neste capítulo, denotaremos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ o espacio funcional definido por todas as funcións reais de variable real definidas no intervalo compacto $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Este espacio ten estrutura de espacio vectorial coa suma e produto por números reais. Como dixemos antes, necesitamos tamén unha norma, neste caso traballaremos coa norma do supremo, representada por

$$\|\psi\|_o = \sup\{|\psi(t)| : t \in I\}$$

Con esta norma podemos ver a converxencia uniforme do seguinte xeito:

Proposición 1.1. $\|\psi_n - \psi\|_o \rightarrow 0$ se e só se, $\psi_n \rightarrow \psi$ uniformemente en I .

Teorema 1.2. *O espacio \mathcal{C} é completo.*

Demostración. Temos que ver que dada unha sucesión de Cauchy, é converxente. Sexa ψ_n unha sucesión de Cauchy en \mathcal{C} , e sexa $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe n_0 tal que, para todo $n, m \geq n_0$ téñese que $\|\psi_n - \psi_m\|_o < \epsilon$, e por tanto $|\psi_n(t) - \psi_m(t)| < \epsilon$ para todo $t \in I$.

Entón, para cada $t \in I$, a sucesión de números reais $\{\psi_n(t)\}$, é de Cauchy. Como \mathbb{R} é completo, devandita sucesión debe ser converxente. Sexa $\psi(t)$ o límite.

Vexamos que a converxencia é uniforme. Sabemos que $|\psi_n(t) - \psi_m(t)| < \epsilon$ para $t \in I$ e para $n, m \geq n_0$. Tomando o límite cando m tende a infinito, obtemos que

$$|\psi_n - \psi| < \epsilon \text{ para todo } t \in I \text{ e todo } n \geq n_0,$$

ou o que é o mesmo $\|\psi_n - \psi\|_0 \rightarrow 0$ cando n tende a infinito.

Sólo queda dicir que dada unha sucesión $\{\psi_n\}$ de funcións reais, converxente uniformemente a ψ , como $\{\psi_n\}$ son funcións continuas, o seu límite é unha función continua, polo tanto $\psi \in \mathcal{C}$ □

Definición 1.3. Dise que un espazo é precompacto ou relativamente compacto se a súa adherencia é compacta.

Por exemplo en \mathbb{R}^n os conxuntos acotados son relativamente compactos. Vexamos que acontece no caso do espazo \mathcal{C} .

Teorema 1.4 (Ascoli-Arzelá). *Un subconxunto A de \mathcal{C} é relativamente compacto se e só se:*

1. *A é acotado, é dicir, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|\psi(t)| < K$ para todo $t \in I$ e toda $\psi \in A$.*
2. *A é equicontinuo: para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t, s \in I$ con $|t - s| < \delta$ e toda $\psi \in A$ verificase:*

$$|\psi(t) - \psi(s)| < \epsilon$$

As transformacións máis habituais entre espazos de funcións continuas son do seguinte xeito:

1. Toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua define un operador de substitución $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ como segue:

$$F(\psi)(t) = f(\psi(t)), t \in I, \text{ para cada } \psi \in \mathcal{C}.$$

Ten sentido o operador anterior dado que estamos considerando unha composición de funcións continuas avaliadas nun número real t . Podemos defini-lo para unha función f continua de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} da seguinte maneira:

$$F(\psi)(t) = f(t, \psi(t))$$

2. Sexa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, consideremos o operador integral $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$

$$K(\psi)(t) = \int_a^t f(s, \psi(s)) ds$$

Se chamamos \mathbb{F} ó operador de integración:

$$\mathbb{F} = \int_0^t \psi(s) ds,$$

temos que K é a composición do operador de integración \mathbb{F} (que é continuo, é doado acotado por $\|\psi\|_0(b-a)$) co operador substitución F estudado no apartado anterior. O operador K é continuo por ser composición de operadores continuos.

Imos definir agora tamén os espazos de Banach (un espacio funcional máis xeneral co das funcións continuas), xa que veremos resultados nestes espazos.

Definición 1.5. Diremos que un espazo é de Banach cando é un espazo vectorial normado e completo.

Polo tanto temos que ter unha forma de operar os elementos do espazo e unha norma, que permite tratar converxencia e sucesións de xeito que toda sucesión de Cauchy sexa converxente.

Cabe destacar que as propiedades do espacio $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ de funcións continuas son totalmente análogas ás de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, sucede o mesmo coa caracterización dos seus subconxuntos compactos a través da equicontinuidade e coa definición dos operadores de integración e de substitución.

Dixemos que o espacio de funcións continuas é un espacio normado e que dada unha norma temos determinada unha distancia; vexamos logo métricas equivalentes en $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$

Definición 1.6. [1] Dúas métricas son topoloxicamente equivalentes, se as correspondentes topoloxías asociadas coinciden.

Exemplo 1.7. Sexa M un espacio e sexan d a distancia usual dada por $d(x, y) = |x - y|$, e d' outra distancia dada por $d'(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$. Consideramos os espacios métricos (M, d) e (M, d') ; vexamos que son topoloxicamente equivalentes:

Dado que $d'(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y)) < d(x, y)$, entón:
 para todo r , $B_d(x, r) \subset B_{d'}(x, r)$; pois se $d(x, y) < r$ entón $d'(x, y) < r$.
 Por outra parte, $B_d(x, r/(1+r)) = B_{d'}(x, r)$, logo en particular, $B_d(x, r/(1+r)) \subset B_d(x, r)$.
 Concluimos logo que as topoloxías asociadas coinciden, e polo tanto estas métricas son topoloxicamente equivalentes.

En certos problemas, emprégase unha variante da norma do supremo:

$$\|\chi\|_r = \sup\{|\chi(t)| \exp(-r(t-a)) : t \in I\}$$

A métrica definida a partir da norma $\|\cdot\|_r$ é equivalente a norma do supremo (caso particular con $r=0$), isto significa que as propiedades topoloxicas son as mesmas: a converxencia

de sucesións, conxuntos acotados e compactos, ... Aínda así, estas métricas son necesarias para precisar cuantitativamente algunhas propiedades como a contractividade.

Vexamos que son as **aplicacións contractivas**, dado que máis adiante, para ver resultados relacionados coa existencia e unicidade de solucións das ecuacións diferenciais, imos pedir a contractividade.

Definición 1.8. Dados dous espazos métricos X e Z , unha aplicación $T : X \rightarrow Z$ dise lipschitziana nun conxunto A contido en X se existe unha constante k de xeito que:

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y) \text{ para todo } x, y \in A.$$

Diremos que k é a constante de Lipschitz de T en A (a menor constante que verifica a anterior desigualdade).

Definición 1.9. Unha aplicación $T : X \rightarrow Y$ é contractiva se existe $k < 1$ de xeito que:

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \text{ para todo } x, y \in X.$$

Isto equivale a dicir que T é lipschitziana e que a súa constante de Lipschitz é menor ca un.

É importante observar que cando tratamos distintas métricas equivalentes, se unha aplicación é lipschitziana con respecto a unha métrica dada, tamén o será respecto a outra métrica equivalente con diferente constante de Lipschitz; sen embargo, coa contractividade non sucede o mesmo. Vemos entón a importancia de introducir varias métricas equivalentes.

Definición 1.10. Dada $T : X \times \Lambda \rightarrow Y$, se a aplicación T depende dun parámetro β pertencente a un conxunto arbitrario Λ , diremos que T é uniformemente lipschitziana en x se independentemente do parámetro, podemos dicir que a aplicación $T^\lambda : X \rightarrow Z$ dada por $T^\lambda(x) = T(x, \lambda)$ é lipschitziana.

Definición 1.11. Se temos $T : X \rightarrow Y$ unha aplicación uniformemente lipschitziana, con constante de Lipschitz $k < 1$, diremos que T é uniformemente contractiva.

1.2. Teoremas de punto fixo

Unha forma de plantear os problemas nos que resolvemos ecuacións é como problemas de punto fixo.

Definición 1.12. Dado un conxunto X e unha aplicación $T : X \rightarrow X$, definimos x_* como un punto fixo se $T(x_*) = x_*$.

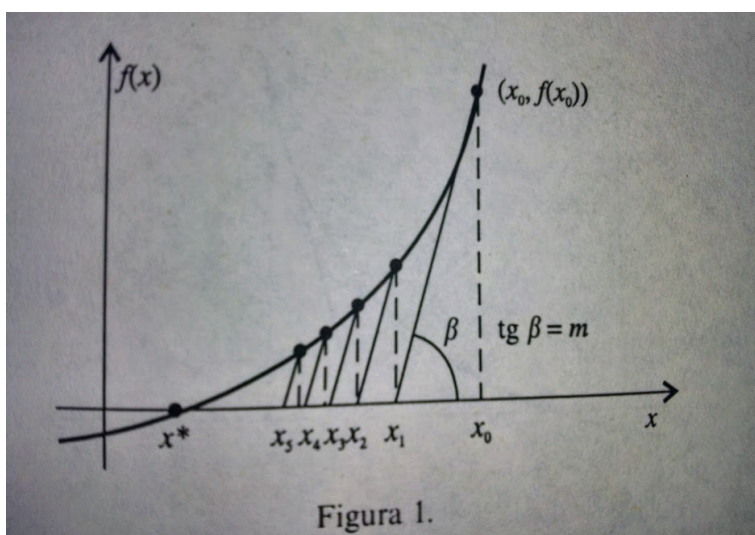
Buscamos entón condicións que garantan a existencia e unicidade deste tipo de puntos.

1.2.1. Método das aproximacións sucesivas

O método de aproximacións sucesivas consiste en buscar un punto fixo dun operador como límite dunha sucesión que se obtén iterando o operador a partir dun valor inicial. Dita sucesión denomínase sucesión de iterantes.

Outros exemplos de aproximación a un punto fixo son o método de Newton ou o método de bipartición.

Como exemplo dun método de aproximación, vexamos un caso particular, o **método da corda**.



Buscamos unha solución dunha ecuación $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

O método da corda consiste en partindo dunha aproximación x_0 á solución buscada, elegimos unha pendente m a cal queda fixada, de xeito que a recta de pendente m pase polo punto $(x_0, f(x_0))$. O punto de corte desta recta co eixe de abscisas determina o punto x_1 co que repetimos a operación. Verifícase:

$$m = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

E en xeral, a sucesión de iterantes cumpre:

$$m = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

E polo tanto:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/m$$

Reinterpretamos o proceso como un problema de punto fixo. Temos que definir unha aplicación $T : X \rightarrow X$, e ver que o punto fixo para a aplicación T , é tamén unha solución da ecuación $f(x) = 0$. Sexa T :

$$T(x) = x - f(x)/m$$

Se $T(x^*) = x^*$, entón:

$$x^* = x^* - f(x^*)/m,$$

ou equivalentemente $f(x^*) = 0$.

No caso dunha ecuación vectorial $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, o esquema iterativo sería da forma:

$$M(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sendo M unha matriz cadrada de tamaño $n \times n$. Se tomamos como M a matriz xacobiana $Df(x_0)$, téñese o método de Newton correxido.

A converxencia deste método é máis rápida ca converxencia do método da corda, dado que a pendente vai variando en cada paso co esquema:

$$Df(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dixemos que a converxencia da sucesión de iterantes ao punto fixo non estaba asegurada, vexamos resultados que garanten a existencia e unicidade dun punto fixo.

Teorema 1.13 (teorema da aplicación contractiva ou do punto fixo de Banach). *Sexa X un espazo métrico completo e $T : X \rightarrow X$ unha aplicación contractiva; entón T admite un único punto fixo x^* e para todo $x_0 \in X$, a sucesión de iterantes $x_1 = T(x_0), \dots, x_n = T(x_{n-1})$ converge a x^* e satisfaise a seguinte estimación do erro:*

$$d(x_n, x^*) \leq k^n d(x_1, x_0) / (1 - k)$$

Demostración. Dado $x_0 \in X$, definimos $x_n = T(x_{n-1})$. Para todo n ,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

de onde, se $m > n$, téñese:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (k^{m-1} + \dots + k^n) d(x_1, x_0) \leq k^n d(x_1, x_0) / (1 - k)$$

Sabemos que $k < 1$, entón k^n tende a cero cando n tende a infinito. Isto significa que $\{x_n\}$ é unha sucesión de Cauchy, e por ser X un espazo completo, unha sucesión converxente a certo $x^* \in X$.

Tomando o límite na expresión:

$$d(T(x_n), x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$$

e por ser T continua (é lipschitziana),

$$d(T(x^*), x^*) = 0,$$

é dicir, $T(x^*) = x^*$.

A unicidade demóstrase supoñendo que temos dous puntos fixos, entón $d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq kd(x^*, y^*)$ o que é imposible sabendo como é k .

□

Teorema 1.14 (da contracción uniforme). *Sexan M e X espacios métricos e $T : M \times X \rightarrow X$ unha aplicación continua e uniformemente contractiva, entón:*

- *Sexa $x^*(\theta)$ o único punto fixo da aplicación contractiva $x \rightarrow T(\theta, x)$. Entón a aplicación $\theta \rightarrow x^*(\theta)$ de M en X é continua.*
- *Se ademais existe L tal que $d(T(\theta, x), T(\mu, x)) \leq Ld(\theta, \mu)$ para todo $\theta, \mu \in M, x \in X$, é dicir, se T é uniformemente lipschitziana en M , entón:*

$$d(x^*(\theta), x^*(\mu)) \leq Ld(\theta, \mu)/(1 - k),$$

é dicir, a aplicación $\theta \rightarrow x^(\theta)$ é lipschitziana.*

Demostración. ■ Dados $\theta, \mu \in M / d(\theta, \mu) < \delta$, temos que ver que $d(x^*(\theta), y^*(\mu)) < \epsilon$.
 $d(x^*(\theta), y^*(\mu)) \leq kd(x, y) < k\delta$. Logo se $\delta = \epsilon/k$ temos probada a continuidade.

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad d(x^*(\lambda), x^*(\mu)) &= d(T(\lambda, x^*(\lambda)), T(\mu, x^*(\mu))) \leq \\ &d(T(\lambda, x^*(\lambda)), T(\lambda, x^*(\mu))) + d(T(\lambda, x^*(\mu)), T(\mu, x^*(\mu))) \leq \\ &kd(x^*(\lambda), x^*(\mu)) + d(T(\lambda, x^*(\mu)), T(\mu, x^*(\mu))) \end{aligned}$$

de onde:

$$d(x^*(\lambda), x^*(\mu)) \leq d(T(\lambda, x^*(\lambda)), T(\mu, x^*(\mu)))/(1 - k)$$

e polo tanto empregando a hipótese temos que:

$$d(x^*(\theta), x^*(\mu)) \leq d(T(\theta, x^*(\theta)), T(\mu, x^*(\mu)))/(1 - k) \leq Ld(\theta, \mu)/(1 - k)$$

□

Cabe destacar como unha das aplicacións máis importantes do teorema da función contractiva a seguinte: dado un espazo de Banach X e unha aplicación $T : X \rightarrow X$, se queremos resolver unha ecuación:

$$T(x) = y$$

podemos plantexar o problema de punto fixo:

$$x = x - T(x) + y$$

1.2.2. Os teoremas de Brouwer e de Schauder

Imos ver cómo atopar puntos fixos, sen empregar a contractividade de hipótese. Si que usaremos, en cambio, a convexidade ou a compacidade.

Definición 1.15. Diremos que un espazo A é convexo se para cada par de puntos $x, y \in A$, o segmento $[x, y] := \alpha x + (1 - \alpha)y : 0 \leq \alpha \leq 1$ está contido en A .

Definición 1.16. O menor conxunto pechado e convexo que contén a un subconxunto B de X é a envolvente conexa, denótase por $\overline{\text{co}}(B)$.

Teorema 1.17 (teorema do punto fixo de Brouwer). *Sexa A un subconxunto pechado e convexo de \mathbb{R}^n e $T : A \rightarrow A$ unha aplicación continua. Entón T ten polo menos un punto fixo.*

A extensión do teorema de Brouwer a espazos de Banach non é directa, e esixe propiedades de compacidade.

Definición 1.18. Diremos que un subespazo K dun espazo topolóxico X é compacto; se dada unha familia de abertos cuxa unión contén a K , admite unha subfamilia finita de abertos cuxa unión contén a K .

Definición 1.19. Diremos que K é secuencialmente compacto, se toda sucesión de K ten unha subsucesión converxente en K .

Teorema 1.20 (teorema do punto fixo de Schauder). *[2] Sexan X un espacio de Banach, K un subconxunto non baleiro, compacto e convexo de X , e $f : K \rightarrow K$ unha aplicación continua. Entón T ten polo menos un punto fixo en A .*

Demostración. A idea da demostración consiste en reducirnos o caso finito. Dado $\epsilon > 0$, consideramos $B_\epsilon(x) : x \in K$, unha cobertura por abertos de K . Como K é compacto, admite un subcobertura finita $B_\epsilon(p_i); i : 1, \dots, N$. Sexa K_ϵ o polígono convexo de p_1, \dots, p_N e V_ϵ o espazo afín que contén esos puntos e polo tanto $K_\epsilon \subset V_\epsilon$.

Consideremos a proxección $\pi_\epsilon : X \rightarrow V_\epsilon$ tal que $\|\pi_\epsilon(x) - \pi_\epsilon(y)\| \leq \|x - y\|$ e defino:

$$f_\epsilon : K_\epsilon \rightarrow K_\epsilon, f_\epsilon(x) = \pi_\epsilon(f(x))$$

1.3. APLICACIÓN AO PROBLEMA DO VALOR INICIAL: EXISTENCIA, UNICIDADE E DEPENDENCIA

Esta función é continua definida nun convexo e compacto dun espacio vectorial de dimensión finita V_ϵ . Polo tanto polo teorema do punto fixo de Brouwer, existe x_ϵ punto fixo para f_ϵ . Falta ver que o é para f .

Dado que K é secuencialmente compacto, podemos atopar unha sucesión $\epsilon_k \rightarrow 0$ de modo que $x_k = x_{\epsilon_k}$ que converxe a algún punto $x' \in K$.

Vexamos $f(x') = x'$.

Sabemos que $f_{\epsilon_k}(x_k) = x_k \rightarrow x'$, vexamos que $f_{\epsilon_k}(x_k) \rightarrow f(x')$. De feito temos que:

$$\|f_{\epsilon_k}(x_k) - f(x')\| = \|\pi_{\epsilon_k}(f(x_k)) - f(x')\| \leq \|f_{\epsilon_k}(x_k) - f(x')\| + \|f(x_k) - f(x')\| \leq \epsilon + \|f(x_k) - f(x')\| \text{ que tende a cero.}$$

Logo $f_{\epsilon_k}(x_k)$ tende a $f(x')$, e como $f_{\epsilon_k}(x_k)$ tende a x' , x' é punto fixo para f . \square

Teorema 1.21. *Sexa X un espacio de Banach, A un subconxunto pechado e convexo de X , e $T : A \rightarrow A$ unha aplicación continua tal que $T(A)$ sexa precompacto. Entón T ten polo menos un punto fixo en A .*

Este teorema é equivalente o teorema de Schauder visto anteriormente.

1.3. Aplicación ao problema do valor inicial: existencia, unicidade e dependencia continua

Empecemos a falar de ecuacións diferenciais, analicemos o problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

onde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (D conxunto aberto de \mathbb{R}^{n+1}) é continua e localmente lipschitziana en x : para cada rectángulo compacto $R \subset D$, existe unha constante $L = L(R)$ tal que para todo $(t, x), (t, y) \in R$:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

1.3.1. Demostración do teorema de existencia e unicidade

Nesta sección construiremos unha aplicación T de modo que a existencia e unicidade de solución do problema de Cauchy sexa equivalente á existencia dun punto fixo en T . Esta aplicación, baixo certas condicións, é contractiva, polo que podemos garantir que ten un único punto fixo.

Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que $t_0 = 0$. Sexan $a, b > 0$ tales que o rectángulo $R \equiv [0, a] \times \overline{B_b(x_0)}$ está contido en D . Sexa L unha constante de Lipschitz en R , e sexa M

o máximo da función continua $|f(t, x)|$ no compacto R .

Sexa $h = \min(a, b/M)$ e sexa $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0, h], \mathbb{R}^n)$, coa norma

$$\|\varphi\|_r \equiv \sup\{|\varphi(t)|\exp(-rt) : t \in [0, h]\}$$

e sexa X o subconxunto:

$$X \equiv \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi(0) = x_0, |\varphi(t) - x_0| \leq b \text{ para todo } t \in [0, h]\}$$

X é un subconxunto pechado de \mathcal{C} , que é un espazo completo, e por tanto, un espazo métrico completo por si mesmo. Definimos a aplicación $T : X \rightarrow \mathcal{C}$ dada por:

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds, t \in [0, h].$$

($T\varphi$ é continua, de feito é derivable) Imos demostrar que, cunha elección axeitada da norma, T é contractiva en X .

1. T leva X en si mesmo:

$$|(T\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))|ds \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b$$

2. Se $r > L$, T é contractiva en X . En efecto, se $\varphi, \psi \in X$, para todo $t \in [0, h]$ téñese que:

$$\begin{aligned} & |(T\varphi)(t) - (T\psi)(t)| \\ &= \left| \int_0^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s)))ds \right| \leq \\ & \int_0^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))|ds \leq \\ & \int_0^t L|\varphi(s) - \psi(s)|ds \\ &= L \int_0^t |\varphi(s) - \psi(s)|\exp(-rs)\exp(rs) \leq \\ & L \int_0^t \exp(rs) \sup\{|\varphi(p) - \psi(p)|\exp(-rs) : s \in [0, h]\}ds \leq \\ & L\|\varphi - \psi\|_r \int_0^t \exp(rs)ds \\ &= L\|\varphi - \psi\|_r(\exp(rt) - 1)/r \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & |(T\varphi)(t) - (T\psi)(t)|\exp(-rt) \leq \\ & L\|\varphi - \psi\|_r(1 - \exp(-rt))/r \leq \\ & L/r\|\varphi - \psi\|_r \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, h]$. Tomando o supremo do primeiro membro temos que T será contractiva se eleximos $r > L$. De aquí, dedúcese que T ten un único punto fixo en X , que é a solución do problema de Cauchy no intervalo $[0, h]$. A extensión a esquerda do cero é totalmente análoga.

1.3. APLICACIÓN AO PROBLEMA DO VALOR INICIAL: EXISTENCIA, UNICIDADE E DEPENDENCIA

Agora imos ver a unicidade doutro xeito, supoñendo a condición de ser Lipschitz global.

Teorema 1.22. *Sexa $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e globalmente lipschitziana en x , é dicir: existe L de xeito que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para todo $t \in [a, b]$. Entón, se $x(t), y(t)$ son as solucións con valores iniciais $x(a) = x_0, y(a) = y_0$, definidas en todo $[a, b]$ e para todo $r > L$ verifícase:*

$$|x(t) - y(t)| \leq r/(r - L)|x_0 - y_0| \exp(rt - ra) \text{ para todo } t \in [a, b]$$

Polo tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x_0 - y_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - y(t)| < \epsilon \text{ para todo } t \in [a, b]$$

Demostración. Faremos o cambio de variable $t \rightarrow t - a$, podemos supoñer que $a = 0$. Como vimos na demostración anterior, a aplicación:

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds, t \in [0, b]$$

de $C = \mathcal{C}([0, b], \mathbb{R}^n)$ en sí mesmo. É lipschitziana con constante de Lipschitz $k \leq L/r$, sempre que usemos a norma $\|\cdot\|_r$. É claro que dita constante de Lipschitz non depende do valor inicial x_0 , de xeito que, en lugar de considerar T como función de φ , considerámola como función do par (φ, x_0) :

$$T : \mathbb{R}^n \times C \rightarrow C$$

$$T(\varphi, x_0)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds, t \in [0, b]$$

T é continua. Por outra parte, se fixamos $r > L$, T é uniformemente contractiva en C , con constante de contractividade L/r .

Finalmente, T é uniformemente lipschitziana en x_0 (con constante 1) como función de x_0 , pois, para $\varphi \in C$ fixa, téñese:

$$\|T(\varphi, x_0) - T(\varphi, y_0)\|_r = \|x_0 - y_0\|_r = |x_0 - y_0|$$

pois a norma dunha función constante $t \mapsto c \in \mathbb{R}^n$ é

$$\|c\|_r = \sup\{\exp(-rt)|c| : t \in [0, b]\} = |c|$$

Polo tanto, aplicando o teorema da contracción uniforme, se chamamos $\varphi(x_0)$ ao punto fixo de $T(\cdot, x_0)$, temos:

$$\|\varphi(x_0) - \varphi(y_0)\|_r \leq 1/(1 - L/r)|x_0 - y_0|$$

de onde:

$$\exp(-rt)|\varphi(x_0)(t) - \varphi(y_0)(t)| \leq r/(r - L)|x_0 - y_0| \text{ para todo } t \in [0, b]$$

e de aquí:

$$|\varphi(x_0)(t) - \varphi(y_0)(t)| \leq r/(r-L)|x_0 - y_0| \exp(rt) \text{ para todo } t \in [0, b]$$

Desfacendo o cambio obtéñese o resultado pedido. \square

1.3.2. Demostración do teorema de existencia de Peano

Se rebaixamos as condicións sobre f e consideramos soamente a continuidade da función, non se poderán aplicar os resultados usados anteriormente. Neste caso, usaremos o teorema de Schauder para probar a existencia de solución.

Empregarase a norma do supremo.

Sexan $t_0 = 0, x_0, a, b, M, h = \min(a, b/M), C = \mathcal{C}([0, h], \mathbb{R}^n)$,

$X \equiv \{\varphi \in C : \varphi(0) = x_0, |\varphi(t) - x_0| \leq b \text{ para todo } t \in [0, h]\}$,

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \varphi(s)) ds, t \in [0, h]$$

como na primeira demostración do teorema de existencia e unicidade. Entón:

1. O conxunto X é pechado e convexo en C .

É convexo dado que tendo en conta a definición de X , se $\varphi, \psi \in X$, $0 \leq \alpha \leq 1$ e $\phi = \alpha\varphi + (1 - \alpha)\psi$ é claro que $\phi(0) = x_0$ e que $\phi(t)$ pertence a bóla pechada $\overline{B_b(x_0)}$ se tanto $\varphi(t)$ como ψ pertencen a devandita bóla, pois esta é un conxunto convexo de \mathbb{R}^n .

Ademais, $\phi(0) = \alpha\varphi(0) + (1 - \alpha)\psi(0) = \alpha * x_0 + (1 - \alpha) * x_0$.

Polo tanto, ϕ pertence a X .

2. T aplica X en sí mesmo.

3. T é unha aplicación continua de X en X .

Consecuencia do teorema de Ascoli-Arzelá, se X é equicontinuo e limitado entón X é relativamente compacto:

- $T(X)$ é limitado, xa que $T(X) \subset X$ e X é limitado, pois, para toda φ téñese que $|\varphi(t) - x_0| \leq b$ para todo $t \in [0, h]$.
- $T(X)$ é equicontinuo, pois, para toda $\varphi \in X$, e todo $t, \tau \in [0, h]$:

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_\tau^t \varphi'(s) ds = \int_\tau^t f(s, \varphi(s)) ds$$

e se, por exemplo, $\tau < t$, entón

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq \int_{\tau}^t |f(s, \varphi(s))| ds \leq M|t - \tau|$$

que implica a equicontinuidade.

Concluimos logo, que polo teorema de Schauder, existe polo menos un punto fixo, é dicir, unha solución do problema de Cauchy en $[0, h]$.

1.4. A cuestión da diferenciabilidade

En espazos vectoriais, existe un tipo especial de aplicacións, as lineais. O obxectivo do cálculo diferencial é a aproximación local dunha aplicación arbitraria por outra lineal.

As nocións do cálculo diferencial nos espazos \mathbb{R}^n exténdense case literalmente ao caso dos espazos normados. Definiremos algún concepto en espazos normados.

Definición 1.23. Sexan X e Y espazos normados, unha aplicación $L : X \rightarrow Y$ dise acotada se existe $k > 0$ de xeito que $\|L(x)\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in X$.

A menor destas cotas k , chámase norma de L .

O espazo de aplicacións lineais acotadas de X en Y , denótase $\mathcal{L}(X, Y)$, é un espazo normado coa norma:

$$\|f\| = \{\sup\|f(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

Ademais é un espazo completo se Y o é, polo tanto un espazo de Banach.

Proposición 1.24. [3] *Unha aplicación lineal é limitada se e só se é continua.*

Demostración. Supoñemos que T é continuo en cero, tomamos a hipótese de linealidade de T , entón $T(0) = 0$. Eleximos $\epsilon = 1$ na definición de continuidade, entón concluimos que existe $\delta > 0$ tal que $\|Tx\| \leq 1$ cando $\|x\| \leq \delta$. Para $x \in X$ non nulo, defino:

$$x' = \delta \frac{x}{\|x\|}$$

Se $\|x'\| \leq \delta$, entón $\|Tx'\| \leq 1$. Polo tanto;

$$\|Tx\| = \|x\| \cdot \|Tx'\|/\delta \leq M\|x\|$$

onde $M = 1/\delta$. Polo tanto, T é limitada. Recíprocamente, se a aplicación T é limitada, temos:

$$\|Tu - Tv\| = \|T(u - v)\| \leq M\|u - v\|; u, v \in X$$

e polo tanto podemos tomar $\delta = \epsilon/M$ na definición de continuidade, chegando a continuidade de T . □

Definición 1.25. Sexan X, Y espazos normados, D subconxunto aberto de X e x_0 un punto de D . Dado $u \in X$, a derivada direccional de f en x_0 na dirección u , denótase $df(x_0, u)$ é:

$$df(x_0, u) = \frac{d}{d\lambda} f(x_0 + \lambda u)|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} ((f(x_0 + \lambda u) - f(x_0))/\lambda)$$

Definición 1.26. Se a derivada direccional de $df(x_0, u)$ existe para todo $u \in X$ e a aplicación de X en Y dada por $u \mapsto df(x_0, u)$ é lineal e limitada, denomínase diferencial de Gateaux en x_0 , e f dise Gateaux diferenciable.

Exemplo 1.27 (Diferencial de Gateaux). Consideremos o espacio de Banach $X = \mathcal{C}([a, b])$ coa súa norma usual e consideremos o funcional $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$J(y) = \int_a^b (\text{sen}^3(x) + y^2(x)) dx$$

, o cal está definido en todo X . Vexamos agora a variación de Gateaux nunha dirección v e nun punto y . Temos que avaliar:

$$\begin{aligned} (J(y + tv) - J(y))/t &= (1/t) \int_a^b [(y + tv)^2(x) - y^2(x)] dx = \\ (1/t) \int_a^b y^2(x) + 2ty(x)v(x) + t^2v^2(x) - y^2(x) &= 2 \int_a^b y(x)v(x) dx + t \int_a^b v^2(x) dx \end{aligned}$$

Co cal se ten que cando t tende a cero:

$$dJ(y, v) = 2 \int_a^b y(x)v(x) dx$$

Esto significa que existe a derivada de Gateaux en toda dirección e ademáis é unha aplicación lineal e continua (e acotada) polo tanto J é Gateaux diferenciable en y .

Definición 1.28. Dise que f é diferenciable Fréchet en x_0 se existe unha aplicación lineal e continua $L : X \rightarrow Y$ de xeito que:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \|f(x_0 + u) - f(x_0) - L(u)\|/\|u\| = 0$$

Entón, L denomínase integral de Fréchet de f en x_0 e denótase $Df(x_0)$.

Exemplo 1.29 (Diferencial de Frechet). Sexa $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, para a función real $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \|x\|^2,$$

tense que F é diferenciable na orixe, con diferencial $DF(0)$ igual a función nula. En efecto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (F(0 + h) - F(0) - DF(0))/h = 0$$

Proposición 1.30. *A relación entre estes tipos de diferenciabilidade é que, cando existe a diferencial Fréchet, entón a diferencial de Gateaux tamén existe e $df(x_0, u) = Df(x_0)(u)$.*

O recíproco é certo coas condicións:

- existe $df(x, u)$, para todo $u \in X$ e todo x nun entorno de x_0
- $u \mapsto df(x_0, u)$ é lineal e limitada.
- $x \mapsto df(x, \cdot)$ de X en $\mathcal{L}(X, Y)$ é continua.

Exemplo 1.31. Vexamos un exemplo no que existe a diferencial de Gateaux pero non a de Fréchet. Se $F(x, y) = xy^3/(x^2 + y^6)$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $F(0, 0) = 0$.

Esta función non é continua no punto $(0, 0)$ e polo tanto non pode ser diferenciabile Fréchet neste punto. Sen embargo, as derivadas direccionais son todas nulas, e polo tanto a función é diferenciabile Gateaux na orixe.

Centrarémonos no cálculo diferencial en espazos normados, e na diferenciabilidade de Fréchet.

Criterio 1.32. *Dada $f : D \subset X \rightarrow Y$ diferenciabile Fréchet e dados x, y de xeito que o segmento $[x, y] \subset D$, aplicando a regra da cadea á función $\psi(t) = f(x + t(y - x))$ de $[0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow Y$ obtéñase que o teorema dos incrementos finitos:*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sup\{\|Df(x + t(y - x))\| : t \in [0, 1]\} \|y - x\|$$

supoñendo o supremo anterior finito, que se verifica se Df é continua en D . Polo tanto, se $D \subset X$ é convexo, entón $\|Df(z)\| \leq K$ para todo $z \in D$. En consecuencia, f é lipschitziana en D .

Definición 1.33. Se X, Y, Z son espazos normados, $f : D \rightarrow Z$ é unha aplicación definida nun aberto de $X \times Y$ e (x_0, y_0) é un punto de D ; defínense as diferenciais parciais de f neste punto como:

$D_x f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Z)$ é a diferencial de Fréchet da aplicación $x \mapsto f(x, y_0)$ no punto x_0 . Analogamente, defínese $D_y f(x_0, y)$.

Definición 1.34. Diremos que f é de clase 1 nun aberto D , cando as diferenciais parciais existen e son continuas en D . As diferenciais de orde superior defínense da mesma maneira e f dise de clase k se é diferenciabile k veces e a k -ésima diferencial é continua.

Imos ver un exemplo de espazos funcionais ónde analizaremos a diferenciabilidade:

Exemplo 1.35. Sexa $I = [0, 1]$, $C = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, coa norma do supremo $\|\cdot\|_0$. Sexa $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase 1, e consideremos o operador de substitución $F : C \rightarrow C$ dado por:

$$F(\varphi)(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ para todo } t \in I$$

Xa vimos que F é un operador continuo, comprobemos que é diferenciable; fixamos $\varphi_0 \in C$, $\varphi \in C$. Entón:

$$F(\varphi_0 + \lambda\varphi)(t) = f(t, \varphi_0(t) + \lambda\varphi(t)) \text{ para todo } t \in I$$

Usamos que f é de clase 1, derivando con respecto de λ obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \varphi_0(t) + \lambda\varphi(t)) \\ &= f_x(t, \varphi_0(t) + \lambda\varphi(t))\varphi(t) \end{aligned}$$

sendo f_x a matriz xacobiana de f respecto de x . Ademáis:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (1/\lambda)(f(t, \varphi_0(t) + \lambda\varphi(t)) - f(t, \varphi_0(t))) = f_x(t, \varphi_0(t))$$

uniformemente en I . Noutras palabras, a derivada de F en φ_0 na dirección de φ é:

$$dF(\varphi_0, \varphi)(t) = f_x(t, \varphi_0(t))\varphi(t)$$

En canto a función de φ , é lineal de C en Y , e ademais está limitada por $M\|\varphi\|_0$ onde $M = \sup_{t \in I} |f_x(t, \varphi_0(t))|$ que é finito por ser o máximo da función continua f_x sobre o conxunto $\{(t, \varphi_0(t)) : t \in I\}$ compacto por ser I e φ_0 continua. Deducimos que F é diferenciable Gateaux.

Vexamos se é Frechet-diferenciable.

Chamemos L a aplicación $\varphi \mapsto dF(\varphi_0, \varphi)$ de forma que:

$$dF(\varphi_0, \varphi)(t) = f_x(t, \varphi_0(t))\varphi(t)$$

Entón, tendo en conta que:

$$f(t, \varphi_0(t) + s\varphi(t)) - f(t, \varphi_0(t)) = \int_0^1 f_x(t, \varphi_0(t) + s\varphi(t))\varphi(t) ds$$

vemos que

$$\begin{aligned} & (F(\varphi_0 + \varphi) - F(\varphi_0) - L(\varphi))(t) \\ &= f(t, \varphi_0(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi_0(t)) - f_x(t, \varphi_0(t))\varphi(t) \\ &= \int_0^1 (f_x(t, \varphi_0(t) + s\varphi(t)) - f_x(t, \varphi_0(t)))\varphi(t) ds \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in I} |(F(\varphi_0 + \varphi) - F(\varphi_0) - L(\varphi))(t)| \leq \\ & \|\varphi\|_0 \sup_{t \in I} \int_0^1 |f_x(t, \varphi_0(t) + s\varphi(t)) - f_x(t, \varphi_0(t))| ds \end{aligned}$$

Ao ser f_x continua, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de xeito que:

$$\|\psi\|_0 < \delta \Rightarrow \|f_x(\cdot, \varphi_0(\cdot) + \psi(\cdot)) - f_x(\cdot, \varphi_0(\cdot))\|_0 < \epsilon$$

Polo tanto,

$$\|\varphi\|_0 < \delta \Rightarrow \|f_x(\cdot, \varphi_0(\cdot) + s\varphi(\cdot)) - f_x(\cdot, \varphi_0(\cdot))\|_0 < \epsilon$$

para todo $s \in I$, e entón;

$$\|\varphi\|_0 < \delta \Rightarrow \|F(\varphi_0 + \varphi) - F(\varphi_0) - L(\varphi)\|_0 < \epsilon\|\varphi\|$$

Polo tanto L é a diferencial de Fréchet de F en φ_0 .

1.5. Extremos locais

Definición 1.36. [4] Sexa X un espazo normado e sexa $F : \Omega \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ unha función real con dominio o aberto Ω . Dise que F ten un mínimo local en $x_0 \in \Omega$, se existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in B(x_0, \epsilon) \subseteq \Omega$, $F(x) \geq F(x_0)$

Proposición 1.37. Sexa X un espazo normado e D un subconxunto aberto e non baleiro de X . Se un funcional $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ten un extremo local en $x \in D$ e ademais F ten derivada de Gateaux en x , entón $dF(x, h) = 0$, para todo $h \in X$.

Demostración. Supoñamos que x é un mínimo local de F en D , entón existirá $\delta > 0$ tal que $x + th \in D$ sempre que $|t| < \delta$ e ademais $F(x + th) \geq F(x)$. Polo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{F(x+th)-F(x)}{t} &\geq 0 \text{ para } t > 0 \\ \frac{F(x+th)-F(x)}{t} &\leq 0 \text{ para } t < 0 \end{aligned}$$

e como F ten derivada de Gateaux no extremo local, sabemos que existen os límites laterais e son iguais, polo tanto $dF(x, h) = 0$. \square

Proposición 1.38. Sexa X un espazo normado e D un subconxunto aberto e non baleiro de X . Se dado un funcional convexo $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ existe $x \in D$ de xeito que $dF(x_0, h) = 0$, para todo $h \in X$. Entón x é un mínimo local de F en D .

Demostración. Sexa D aberto, consideremos unha bola B centrada en x contida en D , que é un conxunto convexo. Podemos afirmar que F é convexo sobre B . Temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= dF(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x+th)-F(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F((1-t)x+t(x+h))-F(x)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1-t)F(x)+tF(x+h)-F(x)}{t} \\ &= F(x+h) - F(x) \end{aligned}$$

Polo tanto, x é un mínimo local. □

Exemplo 1.39. Imos calcular os mínimos absolutos do funcional $F : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(y) = \int_a^b [\text{sen}^3(x) + y^2(x)] dx$$

F está definido sobre un dominio aberto e convexo, vexamos a diferencial de Gateaux (na dirección v e no punto y):

$$\begin{aligned} \frac{J(y+tv) - J(y)}{t} &= (1/t) \int_a^b [(y+tv)^2(x) - y^2(x)] dx \\ &= 2 \int_a^b y(x)v(x) dx + t \int_a^b v^2(x) dx \end{aligned}$$

Polo tanto, tense que:

$$dJ(y, v) = 2 \int_a^b y(x)v(x) dx$$

E anúlase cando a función $y(x)$ é idénticamente nula.

1.6. Teorema da función implícita

Vexamos agora o teorema da función implícita nos espazos de Banach. Para demostrar este resultado usaremos o teorema da contracción uniforme de Banach.

Teorema 1.40. *(Teorema da función implícita nos espazos de Banach) Sexan X, Y, Z espazos de Banach, $D \in X \times Y$ aberto, e sexa $f : D \rightarrow Z$ unha función de clase k en D . Supoñamos ademáis, que existe un punto (x_0, y_0) de D de xeito que:*

1. $f(x_0, y_0) = 0$.
2. $D_y f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y, Z)$ é bixectiva e ten inversa continua.

Entón, existen $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ e unha función $\varphi : B_\delta(x_0) \rightarrow B_\epsilon(y_0)$ de clase k de xeito que:

1. $\varphi(x_0) = y_0$
2. $f(x, \varphi(x)) = 0$ para todo $x \in B_\delta(x_0)$
3. Para todo $x \in B_\delta(x_0)$, $y = \varphi(x)$ é a única solución da ecuación $f(x, y) = 0$ que pertence a $B_\epsilon(y_0)$

Ademáis, as diferenciais sucesivas de φ en x_0 poden obterse do seguinte xeito:

$$D\varphi(x_0) = -(D_y f(x_0, y_0))^{-1} D_x f(x_0, y_0)$$

Demostración. Plantearemos o problema da existencia da función $y = \varphi(x)$ definida implicitamente por unha ecuación da forma $f(x, y) = 0$, como a busca de solucións da ecuación, próximas a solución coñecida (x_0, y_0) . Para esta aproximación, usaremos o metodo de Newton correxido á ecuación $f(x, y) = 0$ con $(x, y) \in D \subseteq X \times Y, D \rightarrow Z$, considerando x como un parámetro coa idea de aplicar o teorema da contracción uniforme. Para simplificar, sexa $x_0 = 0, y_0 = 0, M = D_y f(0, 0)$. Temos o seguinte esquema iterativo:

$$M(y_{k+1} - y_k) = -f(x, y_k), k = 0, 1, \dots$$

Queremos ver que a sucesión $\{y_k\}$ converxe con límite $\varphi(x)$

$$y_{k+1} = y_k - M^{-1}f(x, y_k)$$

Entón para cada $x, \varphi(x)$ pode interpretarse como punto fixo da aplicación:

$$T(x, y) = M^{-1}[My - f(x, y)], y \in Y$$

con x xogando o papel de parámetro. Os puntos fixos de T son os ceros de $f(x, y)$. Aplicamos a T o teorema da contracción uniforme, sea $\delta > 0, \epsilon > 0$ tales que:

$\overline{B}_\delta(0) \times \overline{B}_\epsilon(0) \subset \mathcal{D}$, téñese pola fórmula de incrementos finitos:

$$\begin{aligned} \|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| &= \|(D_y f(0, 0))^{-1}[D_y f(0, 0)(y_2 - y_1) - (f(x, y_2) - f(x, y_1))]\| \leq \\ &\|(D_y f(0, 0))^{-1}\| \max_{0 \leq o \leq 1} \|D_y f(0, 0) - D_y f(x, y_1 + o(y_2 - y_1))\| \|y_2 - y_1\| \end{aligned}$$

Posto que $D_y f$ é continua, pódense elixir $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequenos para que se $\|x\| \leq \delta, \|y\| \leq \epsilon$ se teña:

$$\|D_y f(0, 0) - D_y f(x, y)\| \leq \alpha \|M^{-1}\|^{-1}$$

para $\alpha \in (0, 1)$ fixado. Entón, se $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{B}_\delta(0) \times \overline{B}_\epsilon(0)$, terase que: $(x, y_1 + o(y_2 - y_1)) \in \overline{B}_\delta(0) \times \overline{B}_\epsilon(0)$ para todo $0 \in [0, 1]$ e,

$$\|T(x, y_2) - T(x, y_1)\| \leq \alpha \|y_2 - y_1\|$$

Polo tanto T é continua.

Por outro lado,

$$\|T(x, 0)\| = \|M^{-1}f(x, 0)\| \leq \|M^{-1}\| \|f(x, 0) - f(0, 0)\|$$

Como f é continua, restrinxido δ podemos conseguir que

$$\|M^{-1}\| \|f(x, 0) - f(0, 0)\| < (1 - \alpha)\epsilon$$

e entón, obtemos que:

$$\|T(x, y)\| \leq \|T(x, y) - T(x, 0)\| + \|T(x, 0)\| \leq \alpha \|y\| + (1 - \alpha)\epsilon \leq \epsilon$$

é dicir, $T(\overline{B}_\epsilon(0)) \subseteq \overline{B}_\epsilon(0)$ para todo $x \in \overline{B}_\delta(0)$, e polo tanto T é contractiva en $\overline{B}_\epsilon(0)$ uniformemente respecto de $x \in \overline{B}_\delta(0)$. Usando o teorema da contracción uniforme téñese que existe unha función continua $\varphi : \overline{B}_\delta(0) \rightarrow \overline{B}_\epsilon(0)$ tal que $T(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$, ou tamén, tal que $f(x, \varphi(x)) = 0$ e que verifica que para cada $x \in \overline{B}_\delta(0)$, $y = \varphi(x)$ é a única solución de $f(x, y) = 0$ que pertence a $\overline{B}_\epsilon(0)$.

Vexamos a diferenciabilidade. Supoñamos que φ é diferenciable, e apliquemos a regra da cadea á función $F(x) = f(x, \varphi(x))$, que é constante e igual a cero en $B_\delta(0)$:

$$DF(0) = D_x f(x, \varphi(x)) + D_y f(x, \varphi(x))D\varphi(x)$$

Como f é constante, $DF(0) = 0$, de onde:

$$D\varphi(0) = -(D_y f(0, 0))^{-1} D_x f(0, 0) = -M^{-1} D_x f(0, 0)$$

É dicir, $L := -M^{-1} D_x f(0, 0)$ é a única posible candidata para diferencial de Fréchet de φ en 0. Para demostrar que o é, basta comprobar:

$$\|\varphi(x) - Lx\|/\|x\| \rightarrow 0 \text{ cando } \|x\| \rightarrow 0$$

ou que:

$$\|\varphi(x) - Lx\| < \epsilon\|x\|$$

Tendo en conta que $f(x, \varphi(x)) = f(0, 0) = 0$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - Lx &= \varphi(x) + M^{-1} D_x f(0, 0)x = M^{-1}(D_x f(0, 0)\varphi(x)) = \\ &= -M^{-1}(f(x, \varphi(x)) - f(0, 0) - D_x f(0, 0)x - D_y f(0, 0)\varphi(x)) \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Taylor de $f(x, y)$ en torno a $(0, 0)$, temos que:

$$f(x, y) - f(0, 0) - D_x f(0, 0)x - D_y f(0, 0)y = R(x, y)$$

onde $\|R(x, y)\|/(\|x\| + \|y\|)$ tende a 0 cando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Dado $0 < \mu < 1$, sexa $\rho > 0$ tal que $\|R(x, y)\| \leq \mu(\|x\| + \|y\|)/\|M^{-1}\|$ para todo (x, y) de xeito que $(\|x\| + \|y\|) < \delta$. Posto que φ é continua e $\varphi(0) = 0$, existe $\delta > 0$, $\delta < \rho/2$, tal que:

$$\|\varphi(x)\| < \rho/2 \text{ sempre que } \|x\| < \delta.$$

Entón se $\|x\| < \delta$, téñese:

$$\|x\| + \|\varphi(x)\| < \rho,$$

e ademais:

$$\|\varphi(x) - Lx\| \leq \|M^{-1}\| \|R(x, \varphi(x))\| \leq \mu(\|x\| + \|\varphi(x)\|) \leq \mu(\|x\| + \|\varphi(x) - Lx\| + \|Lx\|)$$

de onde

$$(1 - \mu)\|\varphi(x) - Lx\| \leq \mu(1 + \|L\|)\|x\|$$

é dicir;

$$\|\varphi(x) - Lx\| \leq \mu(1 + \|L\|)\|x\|/(1 - \mu)$$

Isto significa que dado $\epsilon > 0$ arbitrario, tomamos $\mu \in (0, 1)$ tal que $\mu(1 + \|L\|)\|x\|/(1 - \mu) \leq \epsilon$ e obtemos o δ correspondente a μ elexido. Queda entón probada que L é a diferencial de Frechet, usando a propia definición. \square

Capítulo 2

Aplicación dos espacios funcionais a teoría das ecuacións integrais

2.1. Operadores integrais

Imos considerar por $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervalo finito ou infinito. Imos traballar en operadores lineais definidos en $\mathcal{L}^2(\Omega)$ como transformacións integrais.

Definición 2.1. Unha función dise medible Borel, se é medible (a imaxe inversa dun conxunto medible é medible) e ademais está define entre conxuntos de Borel.

Definición 2.2. Sexa \mathbb{B} a familia mínima de subconxuntos de \mathbb{R} que conteña todos os intervalos (a, b) e que sexa:

1. Pechada baixo unións e interseccións numerables
2. Pechada baixo complementarios

Tal familia existe, e os seus elementos denomínanse conxuntos de Borel.

Definición 2.3. Diremos que unha función $k(x, y)$, medible Borel sobre $\Omega \times \Omega$, é un núcleo integral admisible en \mathcal{L}^2 se:

$$f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \int_{\Omega} |k(x, y)f(y)|dy \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

Vexamos algunhas propiedades importantes dos núcleos integrais admisibles;

- A aplicación $f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow (Kf)(x) \equiv \int_{\Omega} |k(x, y)f(y)|dy$ é un operador lineal acotado sobre $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Coñécese a $k(x, y)$ como o núcleo do integral K .

- Sexan K_1, K_2 , os operadores lineais definidos polos núcleos $k_1(x, y), k_2(x, y)$ respectivamente. Entón:

$$K_1 = K_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

- Sexa k un núcleo. Entón as funcións k_n definidas por recurrencia como:

$$k_n(x, y) \equiv \int_{\Omega} k(x, t)k_{n-1}(t, y)dt, k_1(x, y) \equiv k(x, y)$$

son núcleos correspondentes aos operadores K^n respectivamente. É dicir,

$$(K^n f)(x) = \int_{\Omega} |k_n(x, y)f(y)|dy, f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

Os k_n coñécense como núcleos iterados do k .

- Se K ten por núcleo $k(x, y)$, o seu adxunto ten por núcleo $k(y, x)$. Se $k(x, y) = k(y, x)$, diremos que K é autoadxunto.

Definición 2.4. Dado un núcleo $k(x, y)$ admisible en $\mathcal{L}^2(\Omega)$, denotaremos:

$$|||k||| \equiv \sup \int_{\Omega \times \Omega} |k(x, y)f(y)g(x)|dxdy$$

onde $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ con norma de f e g menor igual ca 1. Devandito supremo é finito dado que $|k|$ tamén é admisible en $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Notación 2.5. O conxunto dos núcleos admisibles denótase por \mathcal{N}_{Ω}

Temos logo un conxunto formado polos núcleos e unha norma asociada como acabamos de definir. Este espazo normado é un espazo de Banach.

Neste marco, imos falar das ecuacións integrais.

2.2. Ecuacións integrais de tipo compacto

Unha familia moi importante de núcleos, pola súa frecuente aparición na Física ou na teoría xeneral de operadores lineais, é a dos núcleos de operadores integrais de tipo compacto.

Definición 2.6. Sexa K un operador integral en $H = \mathcal{L}^2(\Omega)$ con núcleo $k(x, y)$. Se existe algún enteiro $n > 0$ de xeito que $K^n \in \mathcal{C}(H)$, diremos que K é un operador integral de tipo compacto.

O seguinte resultado mostra un exemplo dun operador integral de tipo compacto;

Lema 2.7. *Sexa K definido por un núcleo $k(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Entón $K \in C_2(L^2(\Omega))$*

Definición 2.8. Un núcleo dirase de Hilbert-Schmidt sobre Ω se $k(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$.

Imos ver algunhas propiedades para operadores integrais de tipo compacto, coinciden tanto para o caso particular $p = 1$ ($K \in \mathcal{C}(L^2(\Omega))$), como para outro p de xeito que K^p sexa compacto.

1. $\sigma_p(K)$ é, ao sumo, numerable, con único punto de acumulación posible en $\lambda = 0$
2. Se $0 \neq \lambda \in \sigma_p(K) \rightarrow$ a multiplicidade de λ como valor propio de K é finita.
3. Sexa $\lambda \neq 0$. Entón $\lambda \in \sigma_p(K) \cup \sigma(K)$.

Plantexamos entón as seguintes ecuacións integrais coñecidas como ecuacións de Fredholm. Dado un operador integral de tipo compacto K , con núcleo $k(x, y)$, $g \in L^2(\Omega)$, distinguimos:

- $\int_{\Omega} k(x, y)f(y)dy = g(x)$ Ecuación integral lineal de primeira clase.
- $\int_{\Omega} k(x, y)f(y)dy - \lambda * f(x) = g(x)$ Ec. integral lineal de segunda clase.
- $\int_{\Omega} k(x, y)f(y)dy - \lambda * f(x) = 0$ Ec. integral homoxénea.

A partir destas ecuacións, o obxectivo vai ser atopar algunha solución $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Obsérvese que tales ecuacións son:

$$(K - \lambda)f = g$$

Definición 2.9. Estas ecuacións dínse de Volterra se $k(x, y) = 0$ sempre que $x < y$. As ecuacións nas que consideramos o operador adxunto, denomínanse ecuacións adxuntas.

Facendo un repaso, vimos como resolver certos problemas con ecuacións diferenciais, pero moitos problemas convén abordalos como ecuacións integrais do tipo anterior. Veremos agora dous exemplos de como pasar de uns aos outros.

Exemplo 2.10 (Problemas de valores iniciais \rightarrow Ecuacións de Volterra). Dadas tres funcións suficientemente regulares $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $g(x)$ sobre $[a, b]$; consideramos o problema:

$$\begin{aligned} f'' + \alpha f' + \beta f &= g \\ f(a) &= k_0, f'(a) = k_1 \end{aligned}$$

Integrando dende a ata x e tendo en conta os valores iniciais de f e f' temos que:

$$f'(x) - k_1 = -\alpha(x)f(x) - \int_a^x [\beta(t) - \alpha'(t)]f(t)dt + \int_a^x g(t)dt + \alpha(a)k_0$$

E volvendo a integrar dende a ata x :

$$f(x) = - \int_a^x \alpha(y)f(y)dy - \int_a^x \int_a^y [\beta(t) - \alpha'(t)]f(t)dt + \int_a^x dy \int_a^y g(t)dt + [\alpha(a)k_0 + k_1](x-a) + k_0$$

que renomeando queda unha ecuación de tipo Volterra da forma:

$$f(x) - \int_a^x k(x, y)f(y)dy = g_0(x)$$

Exemplo 2.11 (Problemas de contorno \rightarrow Ecuaciones de Fredholm). Dado o problema:

$$\begin{aligned} f'' + \alpha(x)f' + \beta(x)f &= g(x) \text{ en } [a, b] \\ f(a) &= k_a, f(b) = k_b \end{aligned}$$

Integrando desde a ata x , e usando as condicións de contorno, obtemos:

$$f'(x) = c + \int_a^x g(t)dt - \alpha(x)f(x) + \int_a^x [\alpha'(t) - \beta(t)]f(t)dt$$

E volvendo integrar, téñese que:

$$f(x) - k_a = c(x-a) + \int_a^x dy \int_a^y g(t)dt - \int_a^x \alpha(y)f(y)dy + \int_a^x dy \int_a^y [\alpha'(t) - \beta(t)]f(t)dt$$

Polo tanto:

$$f(x) - k_a = c(x-a) + \int_a^x (x-t)g(t)dt - \int_a^x [\alpha(t) - (x-t)\{\alpha'(t) - \beta(t)\}]f(t)dt$$

Collendo $x = b$ e tendo en conta as condicións iniciais chegamos a ecuación integral de tipo Fredholm:

$$f(x) - \int_b^x k(x, y)f(y)dy = g_0(x)$$

onde:

$$\begin{aligned} g_0(x) &\equiv k_a + \int_a^x (x-t)g(t)dt + \frac{x-a}{b-a}[k_b - k_a - \int_a^b (b-t)g(t)dt] \\ k(x, y) &\equiv \frac{x-a}{b-a}[\alpha(y) - (b-y)\alpha'(y) - \beta(y)], \text{ se } x < y \\ k(x, y) &\equiv \frac{x-b}{a-b}\alpha(y) + [\alpha'(y) - \beta(y)]\frac{(y-a)(x-b)}{b-a}, \text{ se } x > y \end{aligned}$$

2.3. Núcleo resolvente

Para resolver as ecuacións integrais de tipo compacto vistas na sección anterior, imos empregar certos métodos. Dado K operador integral de tipo compacto, e $\lambda \neq 0$, se $\lambda \in \rho(K)$, a ecuación integral lineal de clase 2 admite solución única $f \in L^2(\Omega)$, para cada $g \in L^2(\Omega)$. Ademais $f = (K - \lambda)^{-1}g$ (ou $f = (K^+ - \bar{\lambda})^{-1}g$ respectivamente)

É interesante ver cando o operador $(K - \lambda)^{-1}$ será un operador integral definido por un núcleo axeitado. Para contestar isto, veremos o seguinte resultado.

Proposición 2.12. *Sexa K un operador integral de tipo compacto, e sexa $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|K\|$. Entón:*

$$(K - \lambda)^{-1} = -(1 + J_\lambda)/\lambda$$

sendo $J_\lambda \equiv -K(K - \lambda)^{-1} = -(K - \lambda)^{-1}K$ un operador integral de tipo compacto.

Definición 2.13. Ao núcleo $J_\lambda(x, y)$ do operador J_λ chámasele núcleo resolvente de K .

Entón coñecendo o núcleo resolvente, podemos asegurar propiedades da función solución do sistema e mesmo coñecela explicitamente.

2.4. Resolución do caso dexenerado

Imos considerar a ecuación lineal integral de Fredholm de segunda clase, sexa o núcleo:

$$k(x, y) = \sum_1^m a_j(x)\overline{b_j}(y)$$

coas funcións $\{a_j\}_1^n, \{\overline{b_j}\}_1^n$ linealmente independentes e pertencentes a $L^2(\Omega)$.

Definición 2.14. Os núcleos que poden escribirse como suma finita dinse de tipo dexenerado.

Queremos resolver a seguinte ecuación en $\Omega = [a, b]$:

$$\sum_1^n a_j(x) \int_a^b \overline{b_j}(y) f(y) dy - \lambda f(x) = g(x)$$

Imos denotar por $c_j \equiv \int_a^b \overline{b_j}(y) f(y) dy$, a ecuación tranfórmase en:

$$\sum_1^n a_k(x) c_k - \lambda f(x) = g(x)$$

Multiplicando escalarmente por b_j , obtemos o seguinte sistema lineal ordinario:

$$\lambda c_j - \sum_1^n a_{jk} c_k = -g_j$$

onde $a_{jk} \equiv \int_a^b \overline{b_j}(t) a_k(t) dt$, $g_j \equiv \int_a^b \overline{b_j}(t) f(t) dt$. Estudando o determinante da matriz determinada polo sistema anterior, obtemos a existencia e unicidade de solucións do sistema. Para a resolución do sistema teremos que calcular primeiramente os coeficientes c_j e despois a función $f(x)$ desexada.

Exemplo 2.15. $\int_0^1 x(x-y)f(y)dy - \lambda f(x) = x$

Temos logo que $g(x) = x$, $k(x, y) = \sum_1^2 a_j(x)b_j(y)$, $a_1(x) = x^2$, $a_2(x) = x$, $b_1(y) = 1$, $b_2(y) = -y$. Sostituindo, $c_1 \equiv \int_0^1 f(t)dt$, $c_2 \equiv \int_0^1 -tf(t)dt$
Ademáis, $g_1 = \int_0^1 xdx = 1/2$, $g_2 = \int_0^1 -x^2dx = -1/3$

Polo tanto, o sistema asociado sería:

$$\begin{aligned}(\lambda - 1/3)c_1 - (1/2)c_2 &= -1/2 \\ (1/4)c_1 + (\lambda + 1/3)c_2 &= 1/3\end{aligned}$$

que ten como solucións:

$$\begin{aligned}c_2 &= (24\lambda + 1)/(72\lambda^2 + 1) \\ c_1 &= (-36\lambda)/(72\lambda^2 + 1)\end{aligned}$$

Polo tanto substituíndo na ecuación vista na explicación teórica onde aparece $f(x)$, chegamos a función buscada, $f(x) = (x - (24\lambda + 1)/(72\lambda^2 + 1))x - (-36\lambda)/(72\lambda^2 + 1)x^2)/(\lambda)$

Exemplo 2.16. Imos calcular o núcleo resolvente da seguinte ecuación de Fredholm:

$$\int_0^1 (x+y)f(x)dy - \lambda f(x) = g(x)$$

Os coeficientes asociados serán: $a_1(x) = x$, $a_2(x) = 1$, $b_1(y) = 1$, $b_2(y) = y$. O sistema substituíndo estes coeficientes é:

$$\begin{aligned}(\lambda - 1/2)c_1 - c_2 &= -g_1 \\ (-1/3)c_1 + (\lambda - 1/2)c_2 &= -g_2\end{aligned}$$

O determinante da matriz asociada o sistema anterior é: $D(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1/12$.

Agora vexamos $f(x)$, solución da ecuación de Fredholm;

$$f(x) = (1/\lambda)(\sum_1^n c_k a_k(x) - g(x)) = -[(80 * \lambda x^2 + 60\lambda x + x)/(240\lambda^2 - 120\lambda - 1) + x](1/\lambda)$$

Ademais, pódense reescribir os coeficientes c_1 e c_2 en función dos coeficientes do sistema e de g_1 e g_2 de xeito que:

$$f(x) = -\int_0^1 \frac{(xy + (\lambda - 1/2)(x+y) + 1/3)}{[\lambda(\lambda^2 - \lambda - 1/12)]} g(y) dy - (1/\lambda)g(x)$$

Entón, despregando o núcleo resolvente dado que sabemos que $f = -(1 + J\lambda)g/\lambda$, obtemos:

$$J_\lambda(x, y) = \frac{[12xy + (12\lambda - 6)(x+y) + 4]}{[12\lambda^2 - 12\lambda - 1]}$$

2.5. Método iterativo

Imos ver outra forma de resolver ecuacións no caso dexenerado; desta vez imos aproximar a solución mediante as series de Neumann. Por como se procede neste método, o seu uso non é tan frecuente como pode ser o anterior.

Consideremos a ecuación $(K - \lambda)f = g$ en $L^2(\Omega)$, con K un operador de tipo compacto.

Entón:

$$f = (K - \lambda)^{-1}g, \text{ sempre que } \lambda \in \sigma(K)$$

Pero podemos usar as series de Neumann, tendo que:

$$(K - \lambda)^{-1} = -\sum_0^\infty \frac{K^n}{\lambda^{n+1}} = -1/\lambda - \sum_0^\infty \frac{K^n}{\lambda^{n+1}}$$

Como xa dixemos, pódese calcular a función solución unha vez teñamos o núcleo resolvente. Ademais, se comparamos a solución f dependendo do núcleo resolvente ca anterior, temos que:

$$J_\lambda(x, y) = \sum_0^\infty K^n/\lambda^n$$

A serie de Neumann é converxente $\forall \lambda > \|K\|$, logo se $\lambda > \|K\|$, J_λ é un operador integral, e o seu núcleo resolvente pode escribirse como:

$$J_\lambda(x, y) = \sum_1^\infty k_n(x, y)/\lambda^n$$

con k_n o n -ésimo núcleo iterado de K .

Para a aproximación da solución procédese do seguinte xeito:

1. Na ecuación $\int_\Omega k(x, y)f(y)dy - \lambda f(x) = g(x)$, partimos con $f_0(x) \equiv -g(x)/\lambda$ como aproximación de partida.
2. Tomamos $f_1(x) = -g(x)/\lambda - \int_\Omega k(x, y)g(y)dy/\lambda^2$
3. Seguimos e temos $f_2(x) = -g(x)/\lambda - \int_\Omega k(x, y)g(y)dy/\lambda^2 - \int_\Omega \int_\Omega k(x, y)k(y, z)g(z)dydz/\lambda^3$

Procedemos así ata chegar a N .

Exemplo 2.17. $\int_0^1 \exp(x-y)f(y)dy - \lambda f(x) = g(x)$ Temos que:

$$\begin{aligned} k_1(x, y) &= \exp(x-y) \\ k_2(x, y) &= \int_0^1 \exp(x-t)\exp(t-y) = \exp(x-y) \cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ k_n(x, y) &= \exp(x-y) \end{aligned}$$

Entón, o núcleo resolvente vén dado por:

$$J_\lambda(x, y) = \exp(x-y)(\lambda^{-1} + \lambda^{-2} + \dots) = \exp(x-y)/(\lambda - 1)$$

E a solución sería:

$$f(x) = -g(x)/\lambda - \int_0^1 \exp(x-y)g(y)/(\lambda(\lambda - 1))dy$$

2.6. Método dos determinantes de Fredholm

Imos ver un terceiro método para resolver ecuacións integrais lineais de clase 2, sen usar series. O procedemento de Fredholm consiste en, dado o intervalo de integración, facemos unha partición en n subintervalos iguais. Sexa $\delta \equiv (b-a)/n$ a lonxitude destes subintervalos, temos que:

$$\int_a^b k(x, y) f(y) dy \simeq \delta \sum_1^n k(x, x_j) f(x_j)$$

E polo tanto:

$$\lambda f(x) \simeq \delta \sum_1^n k(x, x_j) f(x_j) - g(x)$$

Temos entón para cada punto da partición, unha ecuación alxebrica ordinaria que verifica, e polo tanto un sistema como o seguinte:

$$\lambda f_l - \delta \sum_l^n k_{lj} f_j = g_l, \quad l = 0, 1, \dots, n$$

onde, por exemplo, $f_j = f(x_j)$. A solución deste sistema permite coñecer a imaxe dos puntos de interpolación para $f(x)$.

Como resultado teórico para garantir a existencia e unicidade de solución, imos citar o seguinte teorema:

Teorema 2.18 (Fredholm, 1903; Hilbert, 1904; Carleman, 1921; Smithies, 1941). *Sexa Ω un intervalo de \mathbb{R} , e sexa $k(x, y)$ un núcleo de Hilbert-Schmidt. Dada $g \in L^2(\Omega)$, a ecuación de Fredholm de clase 2 ten para todo λ non nulo tal que $D(\lambda) \neq 0$ unha solución única da forma:*

$$f(x) = (g(x) + \int_{\Omega} J_{\lambda}(x, y) g(y) dy) / \lambda$$

onde $J_{\lambda}(x, y) = D(x, y; \lambda) / D(\lambda)$ é unha función meromorfa (infinitamente diferenciable no plano complexo salvo en puntos aislados que chamaremos polos) en $\mathbb{C} - \{0\}$ con polos unicamente nos puntos do $\sigma_p(K)$

$$\begin{aligned} \text{Notación 2.19. } D(x, y; \lambda) &\equiv \sum_{p=0}^{\infty} D_p(x, y) (-\lambda)^{-p} / p! \\ D(\lambda) &\equiv \sum_0^{\infty} \Delta_p (-\lambda)^{-p} / p! \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} D_0(x, y) &\equiv k(x, y), \quad D_p(x, y) \equiv \Delta_p k(x, y) - p \int_{\Omega} k(x, t) D_{p-1}(t, y) dt \\ \Delta_0 &\equiv 1, \quad \Delta_{p+1} \equiv -p \int_{\Omega} k(x, y) D_{p-1}(y, x) dy dx, \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Observación 2.20. Se o intervalo é finito e o núcleo $k(x, y)$ é continuo, o núcleo resolvente pode escribirse como:

$$\begin{aligned}
J_\lambda(x, y) &= \frac{d(x, y; \lambda)}{d(\lambda)} \\
d(x, y, \lambda) &\equiv \sum_{p=0}^{\infty} d_p(x, y) \frac{(-\lambda)^{-p}}{p!} \\
d(\lambda) &\equiv \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p \frac{(-\lambda)^{-p}}{p!} \\
d_p(x, y) &\equiv \delta_p k(x, y) - p \int_{\Omega} k(x, t) d_{p-1}(t - y) dt
\end{aligned}$$

Exemplo 2.21. Resolveremos a seguinte ecuación empregando o método de Fredholm.

$$\int_0^1 (x + y) f(y) dy - \lambda f(x) = g(x)$$

O método consiste en calcular unha serie de termos que sumados resultan ser o numerador e denominador dun cociente que será igual o núcleo resolvente (xa indicamos anteriormente de que se compón este cociente). A partir do núcleo, xa vimos como calcular a solución dunha ecuación integral de tipo 2. Temos logo:

$$\begin{aligned}
d_0 &= k(x, y) = x + y, \delta_0 = 1 \\
\delta_1 &= \int_0^1 (x + x) = 1 \\
d_1 &= 1(x + y) - \int_0^1 (x + t)(t + y) dt = (x + y)/2 - xy - 1/3 \\
\delta_2 &= \int_0^1 x - x^2 - 1/3 = -1/6
\end{aligned}$$

Agora xa soamente queda substituír na serie e obtemos:

$$\begin{aligned}
d(x, y, \lambda) &= (x + y) + ((x + y)/2 - xy - 1/3)/(-\lambda) = (-6xy + (6\lambda + 3)(x + y) - 2)/(-6 * \lambda) \\
d(\lambda) &= \lambda + \lambda / -\lambda - \lambda / (\lambda^2 * 12)
\end{aligned}$$

E por último, temos que

$$J_\lambda(x, y) = (12xy + (12\lambda - 6)(x + y) + 4)/(12\lambda^2 - 12\lambda - 1)$$

2.6.1. Ecuacións de Volterra

Ata agora traballamos con núcleos de tipo compacto en xeneral, pero indo a núcleos particulares, atopámonos co caso das ecuacións de Volterra. Estas ecuacións teñen un núcleo específico, denominado núcleo de tipo Volterra.

Como caso particular, resolvéñse de maneira análoga ca os exemplos anteriores.

Exemplo 2.22. Imos resolver o problema:

$$\int_0^x f(y) dy - \lambda f(x) = g(x)$$

que ten por núcleo:

$$\begin{aligned}
k(x, y) &= 1 \text{ se } x \geq y \geq 0 \\
k(x, y) &= 0 \text{ se } x < y \leq 1
\end{aligned}$$

Temos que calcular os $k^i(x, y)$ para i dende 1 ata n .

$$\begin{aligned} k_1(x, y) &= \int_0^x k(x, y) = x \text{ se } x \geq y \geq 0 \text{ e cero noutro caso} \\ k_2(x, y) &= \int_0^x k(x, t)k(t, y)dt = x^2/2 \text{ se } x \geq y \geq 0 \text{ e cero noutro caso} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ k_n &= x^n/n! \text{ se } x \geq y \geq 0 \text{ e cero noutro caso} \end{aligned}$$

Entón, o núcleo resolvente sería:

$$J_\lambda(x, y) = (1/(\lambda - 1)) \sum_1^\infty x^n/n$$

Polo tanto;

$$J_\lambda(x, y) = \exp(x)/(\lambda - 1)$$

e a solución sería:

$$\begin{aligned} f(x) &= -g(x)/\lambda - \int_0^x \exp(x)/(\lambda - 1)g(y)dy \text{ se } x \geq y \geq 0 \\ &\text{e } f(x) = -g(x)/\lambda \text{ noutro caso} \end{aligned}$$

2.7. Ecuaciones de tipo simétrico

Como no caso das ecuacións de tipo Volterra, outro caso particular de ecuacións integrais de clase 2 son as ecuacións con núcleo simétrico. Obsérvese que ningunha ecuación de tipo Volterra pode ser de tipo simétrico. Estes núcleos verifican:

1. O operador K , con núcleo simétrico $k(x, y)$ é autoadxunto. Os seus autovalores son todos reais.
2. $\sigma_p(K) \neq \emptyset$
3. Ordenamos os autovalores non nulos de xeito que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ repetidos tantas veces como indique a multiplicidade, con funcións propias ortonormalizadas $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$. Entón o núcleo truncado:

$$k^n(x, y) \equiv k(x, y) - \sum_1^n \lambda_m \varphi_m(x) \overline{\varphi_m(y)}$$

ten valores propios $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$

4. Toda función f do tipo $f(x) = \int_\Omega k(x, y)h(y)dy$, con $h \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, pode desenvolverse en serie de Fourier converxente respecto das autofuncións $\{\varphi_n\}_1^\infty$:

$$f(x) = \sum_1^\infty (\varphi_n, f)\varphi_n(x) = \sum_1^\infty \lambda_n(\varphi_n, h)\varphi_n(x).$$

5. Un núcleo simétrico é dexenerado se e só se σ_p é un conxunto finito de puntos.

Busquemos entón a solución do problema:

$$\int_\Omega k(x, y)f(y)dy - \lambda f(x) = g(x)$$

con operador integral asociado:

$$(Kf)(x) \equiv \int_\Omega k(x, y)f(y)dy$$

que será compacto. Como anteriormente, podemos plantear un sistema asociado a un núcleo $k(x, y)$. Este sistema ten asociada a vez unha matriz sobre a cal podemos calcular os autovalores. Dependendo de como sexan imos dividir a resolución destas ecuacións en dous casos:

1. Se $\lambda \notin \sigma_p(K)$. Ordenando como antes, con funcións propias ortonormalizadas $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$. Como a función $g + \lambda f = Kf \in R(K)$, podemos escribir:

$$g(x) + \lambda f(x) = \sum_1^\infty c_j \varphi_j(x)$$

onde $c_j = \int_\Omega (g + \lambda f)\overline{\varphi_j(x)}dx$. Chamando $h_j \equiv \int_\Omega h\overline{\varphi_j}dx$ con $h = f$ ou g , obtemos

$$c_j = g_j + \lambda f_j = \lambda_j f_j = \lambda_j f_j \Rightarrow c_j = \lambda_j g_j / (\lambda_j - \lambda)$$

Polo tanto,

$$g(x) + \lambda f(x) = \sum_1^\infty \lambda_j \varphi_j(x) / (\lambda_j - \lambda) \int_\Omega g(y)\overline{\varphi_j(y)}dy$$

E finalmente $f = -(1 + J_\lambda)g/\lambda$ con núcleo resolvente:

$$J_\lambda(x, y) = \sum_1^\infty \lambda_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)} / (-\lambda_j + \lambda)$$

2. Se $\lambda \in \sigma_p(K)$. Sexa $\lambda = \lambda_m = \dots = \lambda_{m+r}$. A ecuación terá solución se e só se g é ortogonal ás funcións propias asociadas a estes autovalores e en tal caso ten infinitas solucións da forma $f + \sum_m^{m+r} \alpha_j \varphi_j$

Exemplo 2.23. A ecuación que imos resolver será: $\int_{-1}^1 xy(xy+1)f(y)dy - f(x) = (x+1)^2$

Obsérvese que λ é 1

O núcleo resolvente sería $k(x, y) = x^2y^2 + xy$, e os coeficientes asociados son: $a_1 = x^2$, $a_2 = x$, $b_1 = y^2$, $b_2 = y$

Calculo os coeficientes da matriz coa cal obteremos os autovalores:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \int_{-1}^1 b_1(t)a_1(t)dt = 2/5 \\a_{12} &= \int_{-1}^1 b_1(t)a_2(t)dt = 0 \\a_{21} &= \int_{-1}^1 b_2(t)a_1(t)dt = 0 \\a_{22} &= \int_{-1}^1 b_2(t)a_2(t)dt = 2/3\end{aligned}$$

Entón os autovalores son $\{2/3$ e $2/5\}$, e como λ é distinto destes números, estamos no primeiro caso dos dous vistos anteriormente.

Calculo as funcións propias ortonormalizadas respectivas os autovalores e temos:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \sqrt{3/2}x \\ \varphi_2(x) &= \sqrt{5/2}x^2\end{aligned}$$

Agora, substituindo en $J_\lambda(x, y) = \sum_1^\infty \lambda_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)} / (-\lambda_j + \lambda)$, obtemos que o núcleo resolvente é:

$$J_\lambda(x, y) = 3xy + 5x^2y^2/3$$

e a solución:

$$f(x) = -(x+1)^2 - \int_{-1}^1 [3xy + 5x^2y^2/3](y+1)dy = -[(25/9)x^2 + 6x + 1]$$

Exemplo 2.24. Dado o problema:

$$\int_{-1}^1 x(y+1)f(y)dy - 2f(x) = 3x$$

O núcleo é $k(x, y) = xy + 1$. A partir del, determinamos os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned}a_{11} \int_{-1}^1 1 &= 2 \\ a_{12} = \int_{-1}^1 b_1 * a_2 &= \int_{-1}^1 x = 0 \\ a_{21} &= 0 \\ a_{22} = \int_{-1}^1 x^2 &= 2/3\end{aligned}$$

Entón, os autovalores obtidos son 2 e 2/3, ambos con multiplicidade 1. Como $2 \in \sigma_p(K)$, temos que ver se $g(x) \perp \varphi_1$, para isto facemos a seguinte operación:

$$\int_{-1}^1 3x\sqrt{1/2}x = \sqrt{2}$$

Concluimos entón que non son ortogonais, polo tanto esta ecuación non ten solución no intervalo $[-1, 1]$.

Capítulo 3

Aplicacións a problemas da vida real

3.1. Aplicación do método das aproximacións sucesivas

Exemplo 3.1. [5] A expresión de Planck proporciona a densidade de enerxía radiada (enerxía por unidade de volumen)(u) por un emisor perfecto que se encontre a temperatura absoluta T no intervalo de frecuencias desde un valor ν ata $\nu + \delta\nu$ mediante:

$$u(\nu, T) = \frac{8\Pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1}$$

Na ecuación anterior h é a constante de Planck, k é a constante de Boltzmann e c é a velocidade da luz no baleiro. Deséxase saber a frecuencia $\nu > 0$ para a que, a unha determinada temperatura fixa $T > 0$, se fai máxima a densidade de enerxía emitida. Reescribimos a expresión da densidade da enerxía radiada como:

$$u(\nu, T) = M \frac{\nu^3}{\exp(\frac{N\nu}{T}) - 1}$$

Buscamos un extremo da función anterior, polo tanto, derivamos e igualamos a cero, obtendo a seguinte ecuación:

$$3\nu^2(\exp(\frac{N\nu}{T}) - 1) - \nu^3(N/T) \exp(\frac{N\nu}{T}) = 0$$

Dividindo por ν^2 e substituindo α por $\frac{N\nu}{T}$ temos que:

$$3(\exp(\alpha) - 1) - \alpha \exp(\alpha) = 0$$

Unha solución é a trivial, que significa que a densidade sería nula.

Vexamos se hai algunha máis usando o método das aproximacións sucesivas. Buscaremos un intervalo no que $g(\alpha) = 3(1 - \exp(-\alpha))$ sexa unha contracción.

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= 3(\exp(\alpha)) \\ 0 < g'(\alpha) < 1 &\text{ se e só se } \alpha > \log(3) \end{aligned}$$

Por ser a función continua monótona crecente para $\alpha > \log(3)$ o método garante a existencia dun punto fixo e será posible atopalo co método das aproximacións sucesivas. Partimos dun $\alpha_0 = \log(3)$ e temos:

$\alpha_1 =$	$g(\alpha_0) =$	$3 \cdot (1 - e^{-1.1}) =$	2,001386749
$\alpha_2 =$	$g(\alpha_1) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,001386749}) =$	2,594556788
$\alpha_3 =$	$g(\alpha_2) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,594556788}) =$	2,775963098
$\alpha_4 =$	$g(\alpha_3) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,775963098}) =$	2,813131625
$\alpha_5 =$	$g(\alpha_4) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,813131625}) =$	2,819949757
$\alpha_6 =$	$g(\alpha_5) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,819949757}) =$	2,821173187
$\alpha_7 =$	$g(\alpha_6) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821173187}) =$	2,821391836
$\alpha_8 =$	$g(\alpha_7) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821391836}) =$	2,821430884
$\alpha_9 =$	$g(\alpha_8) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821430884}) =$	2,821437856
$\alpha_{10} =$	$g(\alpha_9) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821437856}) =$	2,821439101
$\alpha_{11} =$	$g(\alpha_{10}) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821439101}) =$	2,821439324
$\alpha_{12} =$	$g(\alpha_{11}) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821439324}) =$	2,821439364
$\alpha_{13} =$	$g(\alpha_{12}) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821439364}) =$	2,821439371
$\alpha_{14} =$	$g(\alpha_{13}) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821439371}) =$	2,821439372
$\alpha_{15} =$	$g(\alpha_{14}) =$	$3 \cdot (1 - e^{-2,821439372}) =$	2,821439372

Entón $\alpha=2,821439372$ e desfacendo o cambio $\nu=2,821439372 \cdot T/N$

3.2. Método de Newton-Raphson

Exemplo 3.2. O diñeiro necesario para pagar a cuota correspondiente a un crédito hipotecario a interés fixo estímase habitualmente mediante a denominada ecuación da anualidad ordinaria:

$$Q = A[1 - (1 + i)^n]/i$$

onde Q é a cantidade (en euros) pedida en préstamo, A é a cota que debe pagar o beneficiario do préstamo, i é a taxa de interés (en tanto por 1) fixado pola entidade bancaria que concede o préstamo e n é o número de períodos durante os cales se realizan pagos da cota (meses se se paga mensualmente, trimestres se se paga trimestralmente, semestres se se paga semestralmente ou anos se se paga anualmente).

Unha parella que desexa comezar unha vida en común plantéxase adquirir unha vivenda e para isto saben que precisan pedir un préstamo de 150000 euros a pagar semestralmente durante un prazo que eles desexan que sexa de 10 anos. Sabendo que para atender este pago poden destinar unha cantidade máxima de 600 euros mensuais, calcúlese cal é o tipo máximo de interés o que poden negociar o seu préstamo coas entidades bancarias.

Posto que o pago é semestral, en 10 anos realizarán un total de 20 cuotas. Ademais dado que poden pagar 600 euros o mes, cada semestre poderán afrontar o pago de 3600 euros. Queda logo a seguinte ecuación:

$$150000 = 3600[1 - (1 + i)^{-20}]/i$$

Obténense co método de Newton a seguinte sucesión de valores:

$$\begin{aligned} i_1 &= -0,1647\dots \\ i_2 &= -0,1212\dots \\ i_3 &= -0,0852\dots \\ i_4 &= -0,0659\dots \\ i_5 &= -0,0617\dots \\ i_6 &= -0,0616\dots \\ i_7 &= -0,0616\dots \end{aligned}$$

Como resultado do anterior danse conta que dificilmente poderán atopar a vivenda que desexan, pois parece razoable pensar que ningún banco ou caixa de aforros lles concederá un préstamo a un interés negativo do -6,16.

3.3. Problemas de optimización

Exemplo 3.3. [6] Imos estudar o movemento vertical ascendente dun cohete que alcanza unha altitude h co mínimo gasto de combustible. O movemento $x(t)$ vén dado pola ecuación:

$$\begin{aligned} mx''(t) &= \mathbb{F}(t) - mg, \quad 0 < t < T \\ x(0) &= x'(0) = 0, \quad x(T) = h \end{aligned}$$

onde m é a masa do cohete, mg a forza da gravidade e $\mathbb{F}(t)$ a forza do cohete. Non teremos en conta a perda de masa debida o uso do combustible e tomaremos $m = g = 1$.

A medida do gasto de combustible mínimo en $[0, T]$ será:

$$\int_0^T |\mathbb{F}(t)| dt$$

O extremo superior do intervalo de integración T , quedará fixo. Entón, o gasto mínimo de combustible $\alpha(T)$ no intervalo dado vén dado pola solución do seguinte problema de minimización:

$$\min_{\mathbb{F}} \int_0^T |\mathbb{F}(t)| dt = \alpha(T)$$

Obsérvese que buscamos a mínima función integrable $\mathbb{F} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Supoñamos que a temos.

Integrando a ecuación diferencial anterior, temos que:

$$x(t) = \int_0^T (t - \tau)\mathbb{F}(\tau) d\tau - t^2/2$$

e polo tanto:

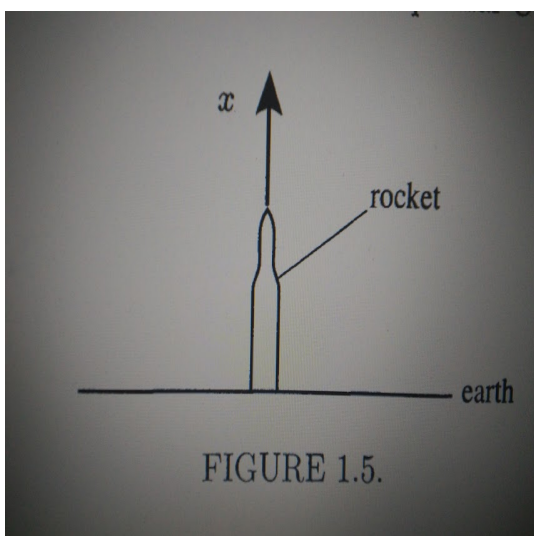
$$x(T) = h = \int_0^T (T - \tau)\mathbb{F}(\tau)d\tau - T^2/2.$$

Resumindo, para unha altura dada $h > 0$, temos que determinar o empuxe $\mathbb{F}(\cdot)$ e o tempo T .

Se consideramos soamente forzas clásicas, entón un impulso nun tempo t da forma:

$$\mathbb{F} = \delta_t$$

excluirase. Sen embargo, imos considerar os seguintes problemas generalizados para funcionais:



1. Para unha altura dada h e un tempo final $T > 0$, estamos buscando unha solución F do seguinte problema de minimización:

$$\min \|F\| = \alpha(T), F \in \mathcal{C}[0, T]$$

coa condición

$$F(T - t) - T^2/2 = h$$

2. Ademais, determinaremos o tempo final T da seguinte maneira; $\alpha(T) = \min_{\mathbb{F}} \int_0^T |\mathbb{F}| dt$. Debemos destacar que o funcional $F \in \mathcal{C}[0, T]$ ten a seguinte forma:

$$F(u) = \int_0^T u(t)\mathbb{F}(t)dt \text{ para todo } u \in \mathcal{C}[0, T], \text{ onde a función } \mathbb{F} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é continua e;}$$

$$\|F\| = \int_0^T |\mathbb{F}(t)| dt$$

A solución dos problemas descritos anteriormente é:

$$\begin{aligned} F &= T\delta_0 \\ T &= (2h)^{1/2} \\ \text{co mínimo gasto } \|F\| &= T \end{aligned}$$

Isto téñse minimizando o funcional F e empregando a condición inicial en T . Esta solución corresponde o impulso nun instante inicial $t = 0$. Sabemos que:

$$F(u) = \int_0^T u(t)\mathbb{F}(t)dt$$

Entón:

$$h = F(w) - T^2/2, \text{ onde } w(t) = T - t$$

e desdexando temos que:

$$F(w) = T^2/2 + h = T((T/2) + (h/T)) = T\delta_0$$

Ademáis:

$$\begin{aligned} \alpha(T) = h/T + T/2 \quad \alpha'(T) = (h/T + T/2)' &= -T^{-2}h + 1/2 = 0 \\ T &= (2h)^{1/2} \end{aligned}$$

En resumo, dado un cohete, buscamos unha función que nos indique o mínimo gasto de combustible. Isto sucede cando a forza que se exerce sobre o cohete é mínima. Observamos que para minimizar a forza que se exerce sobre o cohete, podemos minimizar outro funcional F antes descrito, coa seguinte relación entre eles:

$$\|F\| = \int_0^T |\mathbb{F}(t)| dt$$

Unha vez temos calculado o funcional F , simplemente identificamos $\alpha(t)$, e igualando a cero a súa derivada temos o tempo no que o gasto de combustible é mínimo (depende da altura).

3.4. A braquistocrona

Imos calcular o tempo de descenso dunha conta que se desliza sen rozamento a través dun alambre que une dous puntos prefixados. Representaremos o alambre como unha curva diferenciable $y = \varphi(x)$ no plano (x, y) que une os puntos $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ tal que $y_0 > y_1$ e $x_0 > x_1$. Chamaremos g a aceleración da gravidade. Sexa $T(x)$ o tempo que

tarda a conta en alcanzar o punto da curva $(x, \varphi(x))$. Sexa $v(x)$ a aceleración da conta no punto $(x, \varphi(x))$. Téñese que a conta parte do repouso, $v(x_0) = 0$.

Aproximamos para un h pequeno o arco da curva entre os puntos $(x, \varphi(x))$ e $(x+h, \varphi(x+h))$, polo segmento rectilíneo que os une, e supoñemos $v(x)$ constante, temos logo:

$$v(x) \sim \frac{\sqrt{h^2 + (\varphi(x+h) - \varphi(x))^2}}{T(x+h) - T(x)}$$

é dicir;

$$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} \sim \frac{\sqrt{1 + (\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h})^2}}{v(x)}$$

e polo tanto T é derivable con derivada:

$$T'(x) = \frac{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}}{v(x)}$$

Sabemos que a conta na posición $(x, \varphi(x))$ terá enerxía cinética e potencial dependentes dunha masa m . Pola lei de conservación da enerxía, téñese:

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 + mg\varphi(x) = mgy_0$$

e polo tanto;

$$v(x) = \sqrt{2g(y_0 - \varphi(x))}$$

$$T'(x) = \frac{\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - \varphi(x))}}$$

Supoñendo que T é continua, é dicir que se cumpre;

$$T(x_1) - T(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} T'(x) dx$$

O resultado desta integral é o tempo total de descenso T , o cal depende de φ e pode ser considerado como un funcional $T(\varphi)$ con dominio $D(T)$ dado por un conxunto de funcións continuamente diferenciables sobre $[x_0, x_1]$ verificando: $\varphi(x_0) = y_0, \varphi(x_1) = y_1$, tales que exista e sexa finita a integral:

$$T(\varphi) := \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - \varphi(x))}} dx$$

O plantexamento do problema obriga a que a curva $y = \varphi(x)$ que minimize o tempo de descenso, pase polos puntos P_0 e P_1 , co cal a curva ten que pertencer a D e debe verificarse $\varphi(x_0) = y_0, \varphi(x_1) = y_1$.

Imos minimizar o funcional;

$$F = \int_{x_0}^{x_1} f(t, \varphi(t), \varphi'(t)) dt$$

onde $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}$ Esta función f , está definida en $G = \mathbb{R} \times (-\infty, y_0) \times \mathbb{R}$ Minimizamos o funcional F sobre:

$$D_G := \varphi \in C^1([x_0, x_1]) : t \in [x_0, x_1], (t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in G$$

Supoñemos que os puntos son $P = (0, 0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ con $y_1 < 0$ e $x_1 > 0$, entón o problema da braquistocrona redúcese a estudar a existencia de mínimos do funcional:

$$F(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+\varphi'(x)^2}}{\sqrt{\varphi(x)}} dx$$

sobre o conxunto $D_G := \varphi \in C^1([x_0, x_1]) : t \in [x_0, x_1], (t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in G$, sendo $G = \mathbb{R} \times (x_0, +\infty) \times \mathbb{R}$

3.5. A ecuación de renovación

O problema consiste en dada unha compoñente, cunha duración limitada modelada mediante unha variable T_1 , que transcurrida ten que ser reemplazada por outra compoñente con tempo de vida T_2 e así sucesivamente (caso dunha bombilla). O tempo de vida dunha compoñente é non negativo, independente da compoñente e consideramos a sucesión de tempos idénticamente distribuídos.

Sexan $W_i = T_1 + \dots + T_i$ os tempos reais de renovación con $T_i = 0$ e N_t o número de conteo de renovacións.

Consideramos o tempo de vida como unha variable aleatoria continua con función de densidade $f(t)$, e plantexámonos calcular a densidade de renovación $h(t)$, definida pola fórmula;

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\text{Probabilidade de unha ou máis renovacións en } (t, t + \Delta t)) / (\Delta t)$$

A probabilidade de que se produza un reemplazamento no intervalo $(t, t + \Delta t)$ é a suma da probabilidade $f(t)\Delta t$ de que se trate no primeiro fallo, máis a suma das probabilidades de que producise un reemplazamento en $(t - s, t - s + ds)$ seguido dun fallo de lonxitude s ; chegando a seguinte ecuación integral:

$$h(t) = f(t) + \int_0^t h(t-s)f(s)ds, t \geq 0$$

Demostración. Condicionando sobre o valor do primeiro tempo de vida T_1 obtéñese $h(t) = \int_0^\infty E(N_t | T_1 = s) dF(s)$, onde

$$E(N_t | T_1 = s) = 1 + h(t-s) \text{ se } s \leq t \text{ e cero noutro caso}$$

Polo tanto

$$h(t) = \int_0^t (1 + h(t-s))dF(s) = F(t) + \int_0^t h(t-s)dF(s)$$

□

No caso particular de que os tempos se distribuísen de forma exponencial con parametro λ , o número de renovacións é un proceso de Poisson con parametro λt , con función de probabilidade (fiabilidade):

$$e^{-\lambda} \lambda^k / k! = \lambda e^{-\lambda t}$$

e función de distribución:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Estudiamos logo un exemplo concreto, mantemento nunha fábrica na que se producen renovacións dun sistema, nun determinado período de tempo. Imos considerar que o sistema require ser renovado cada 4 minutos, logo o proceso de renovación segue unha distribución exponencial con parametro 1/4. Polo tanto, a probabilidade de ter unha renovación no primeiro minuto é 0,22, aumentando según aumenta o tempo, sendo 0,98 no minuto 16.

Agora imos simular un proceso de renovación no que os tempos entre as renovacións seguen unha distribución uniforme en (0, 2). Simularemos 100 renovacións.

```
> x=runif(100,0,2)
> y=cumsum(x)
> z=which.max(y>6)-1
> z
[1] 9
1
```

Obtemos z , que sería a última renovación antes de chegar o instante $t = 6$.

Podemos repetir o proceso, obtendo unha mostra da variable N_t , que será útil para ver a media de renovacións nun proceso como co que estamos traballando.

```
> muestra=rep(0,1000)
> for (i in 1:1000){
+ x=runif(100,0,2)
+ y=cumsum(x)
+ muestra[i]=which.max(y>6)-1
+ }
> muestra
[1] 4 5 4 3 6 3 6 5 6 6 7 5 6 5 5 5 5 5 9 4 6 6 5 6
[25] 6 6 3 6 3 4 9 6 4 5 4 9 8 7 9 7 8 5 6 6 7 6 4 7
[49] 5 7 6 3 6 5 6 4 5 5 8 6 6 7 3 5 7 5 5 7 5 7 6 4
[73] 6 7 5 6 6 5 6 3 3 5 4 5 8 4 5 5 5 7 7 6 3 5 5 4
[97] 4 5 9 6 4 6 6 5 3 8 4 6 6 4 3 7 7 5 4 5 4 6 5 6
[121] 4 4 7 6 8 7 5 5 8 7 3 7 7 4 6 6 5 3 6 5 6 6 7
[145] 7 6 6 4 7 6 10 4 6 5 7 6 4 6 8 5 4 5 7 6 7 5 9
[169] 7 6 6 5 7 5 7 5 8 8 5 3 5 8 4 5 5 5 7 5 6 6 4 7
[193] 7 6 8 6 7 7 5 5 5 4 7 6 3 6 8 4 9 6 5 6 3 5 4 5
[217] 7 6 5 4 6 7 4 6 6 3 6 5 5 8 8 4 7 6 7 6 4 3 6 4
[241] 6 6 5 10 6 7 8 6 4 6 9 5 5 5 8 5 4 4 4 7 6 6 7 5
[265] 5 6 5 9 6 5 5 6 6 4 6 9 6 4 4 6 7 4 4 5 6 4 4 8
[289] 4 9 5 6 4 7 4 5 5 6 7 6 6 8 5 8 6 4 5 6 5 7 5 6
[313] 6 6 5 9 8 5 4 6 6 5 6 5 6 7 6 5 5 7 7 6 5 4 4
[337] 6 7 8 4 5 5 5 7 4 6 5 5 7 5 6 5 5 5 5 5 6 9 7
[361] 10 7 5 5 6 10 4 7 5 5 6 4 5 7 6 4 9 4 6 4 3 7 7 5
[385] 4 5 4 5 4 6 8 6 6 4 9 7 6 4 4 3 4 4 5 9 3 5 4
[409] 5 8 5 7 8 7 6 7 6 6 5 11 7 4 5 4 9 6 5 4 4 4 6 4
```

Agora co comando *mean* da mostra obtéñase a media de renovacións que se dan antes dun instante t .

3.6. A ecuación loxística con memoria

Consideremos unha poboación $x(t)$ cuxa taxa de crecemento é constante a e tal que os efectos sociais se teñen en consideración para a presenza dun certo retraso na acción:

$$x'(t) = ax(t)(1 - x(t - T)/K)$$

Se coñecemos a historia da poboación no intervalo $[0, T]$, pódese plantexar unha ecuación integral equivalente a ecuación dada.

Un exemplo deste tipo de ecuacións, é o seguinte: temos un termostato perfecto que funciona conforme a lei

$$T'(t) = k(T_d - T(t))$$

onde $T(t)$ é a temperatura ambiente e T_d é a temperatura desexada, que suporemos constante. Se a sinal do sensor tarda r segundos en alcanzar o regulador, a ecuación convértese en:

$$T'(t) = k(T_d - T(t - r))$$

Supoñamos coñecida a evolución da temperatura no intervalo $[0, r]$, que virá dada pola función inicial $\varphi(t)$.

Obsérvese que se a temperatura desexada é maior ca a temperatura ambiente tendo en conta o retardo, o termóstato actuaría baixando a temperatura, e se fose menor, pois o termóstato subiría a temperatura.

1. No intervalo $[r, 2r]$, o problema anterior é equivalente o problema

$$\begin{aligned} T'(t) &= k(T_d - \varphi(t - r)) \\ T(r) &= \varphi(r) \end{aligned}$$

Temos que:

$$T'(t) = K(T_d - T(t - r))$$

pero se $t \in [r, 2r]$, entón $t - r \in [0, r]$ e polo tanto $T(t - r) = \varphi(t - r)$. Por exemplo no caso particular do extremo $2r$,

$$T'(2r) = K(T_d - T(2r - r)) = K(T_d - T(r)) = K(T_d - \varphi(r))$$

2. Resolvamos o problema anterior en $[r, 4r]$ para $\varphi(t) = 1$. Que a función sexa constante un, equivale a dicir, que durante o periodo de retardo, a temperatura manténse constante en un grao.

En $[r, 2r]$ imos aproveitar o a equivalencia vista anteriormente, deste xeito:

$$T'(t) = K(T_d - 1)$$

Entón, integrando:

$$T(t) = K(T_d - 1)t$$

o que quere decir que nese intervalo a temperatura vai subindo de xeito constante. No intervalo $[2r, 4r]$, imos integrar por variables separadas a derivada de T definida o principio do exercicio.

$$T(t - r) = T_d + \exp(k(t - r))C, \text{ sendo } C \text{ a constante de integración.}$$

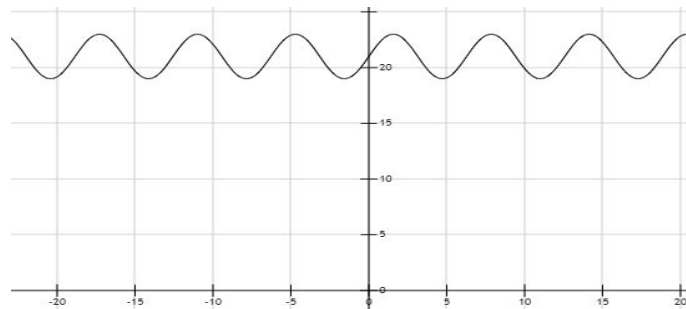
E como a solución non pode ser complexa;

$$T(t - r) = T_d + C\cos(t - r)$$

3. Imos ver o caso de que $k = 1$ e $r = \pi/2$. Teríamos entón:

$$T(t - \pi/2) = T_d + C\cos(t - \pi/2) = T_d + C\sin(t)$$

Temos entón que a función resultado que nos ofrece como varía a temperatura co tempo e de tipo trigonométrica, pero trasladada de xeito que oscila con respecto a temperatura buscada.



Bibliografía

- [1] Xosé María Masa Vázquez. *Topoloxía Xeral* Ed. Universidade de Santiago de Compostela, 1999.
- [2] Horia Cornean, *Schauder's Fixed Point Theorem*, 2004.
- [3] John Hunter and Bruno Nachtergaele, *Applied Analysis* Ed. World Scientific, 2001.
- [4] Jesus García Falset. *Análisis Funcional No Lineal*, 2007.
- [5] Carlos Conde e Emanuele Schiavi, *Métodos numéricos de resolución de ecuacións non lineais*
- [6] Eberhard Zeidler. *Applied Functional Analysis, Main Principles And Their Applications* , primera edición, 1995.
- [7] Carlos Fernández Pérez e José Manuel Vegas Montaner, *Ecuaciones diferenciales II* Edición Pirámide, 1996.
- [8] Lorenzo Abellanas e Alberto Galindo, *Espacios de Hilbert* Segunda edición, Madrid, 1991.
- [9] Sergio Plaza Salinas e José Manuel Gutiérrez Jiménez, *Dinámica del método de Newton*