USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

unidade **didáctica 4**

Ecuacións diferenciais. Aplicacións á bioloxía

Rubén Figueroa Sestelo

Departamento de Análise Matemática
Facultade de Matemáticas

unidadedidáctica
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

unidades**didácticas**
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

9 788498 879520

titulación
Grao en Bioloxía

materia
Matemáticas para Bioloxía

unidade **didáctica 4**

Ecuacións diferenciais. Aplicacións á bioloxía

Rubén Figueroa Sestelo

Departamento de Análise Matemática
Facultade de Matemáticas

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostea

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital

Dep. Legal: C 62-2013
ISBN 978-84-9887-952-0

MATERIA: Matemáticas para Bioloxía
TITULACIÓN: Grao en Bioloxía
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Funcións reais dunha e varias variables reais
Xeneralidades sobre funcións reais de variable real
Límites e continuidade de funcións reais dunha variable real
Límites e continuidade de funcións reais de varias variables reais
Unidade II. Diferenciación de funcións de variable real
Derivada dunha función real de variable real. Interpretación xeométrica
Derivadas de orde superior
Derivadas parciais dunha función real de varias variables reais
Unidade III. Integración de funcións de variable real
Cálculo de primitivas dunha función real de variable real.
Integración por partes, cambio de variable, integración de funcións racionais
A integral definida. Regra de Barrow
Unidade IV. Ecuacións diferenciais. Aplicacións á bioloxía
Ecuacións diferenciais: definicións e conceptos básicos
Problemas de valor inicial
Integración de ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde: Ecuacións de variables separadas e ecuacións lineares
Aplicacións:
-Modelos poboacionais: Lei de Malthus, ecuación loxística, ecuación de von Bertalanffy
-Lei de arrefriamento de Newton
-Lei de desintegración radioactiva

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

A presente unidade didáctica enmárcase dentro da materia *Matemáticas para Bioloxía,* que pertence ao primeiro curso do plan de estudos do Grao en Bioloxía da Universidade de Santiago de Compostela. Esta materia nace como ferramenta para que os futuros biólogos e biólogas adquiran os coñecementos e destrezas matemáticas necesarias para exercer no futuro a súa profesión científica. Máis concretamente, esta materia pretende proporcionar unha formación básica en cálculo infinitesimal e ecuacións diferenciais, facendo énfase na modelaxe dalgúns procesos relacionados coa bioloxía, como poden ser o crecemento poboacional ou as leis de arrefriamento, entre outros.

Nesta unidade didáctica farase fincapé, precisamente, nesta última parte. Así, nela desenvolveremos as nocións e resultados básicos relativos á teoría de ecuacións diferenciais, estudando algúns métodos para a resolución dalgún tipo particular delas, así como a súa aplicación á modelaxe de diversos procesos da vida real. Para este desenvolvemento farase imprescindible manexar con soltura os contidos das unidades didácticas anteriores relacionadas co estudo das funcións reais de varias variables reais, así como o cálculo diferencial e integral.

OS OBXECTIVOS

A continuación enumeramos os obxectivos que pretendemos que os nosos alumnos acaden ao final da presente unidade didáctica:

— comprender e manexar os conceptos e a nomenclatura propia das ecuacións diferenciais;

— discutir a existencia e/ou unicidade de solución dunha ecuación diferencial ordinaria mediante a aplicación dos teoremas de Cauchy-Peano e Picard-Lipschitz;

— integrar ecuacións diferenciais en variables separadas e lineares. Resolver problemas de valor inicial asociados a estes tipos de ecuacións;

— coñecer algún modelos matemáticos de uso frecuente en bioloxía e que veñen expresados mediante ecuacións diferenciais. Resolver problemas que empreguen estes modelos;

— empregar o programa informático *Matlab* como ferramenta auxiliar de apoio no traballo con ecuacións diferenciais, tanto para resolvelas como para realizar representacións gráficas das súas solucións.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Co fin de que os alumnos e alumnas acaden ao final da unidade didáctica os obxectivos formulados, ao longo da mesma aplicaranse unha serie de principios metodolóxicos que terán como fío conductor principal a aprendizaxe significativa. A meta deste principio metodolóxico consiste en que os e as estudantes relacionen a información nova que están recibindo coa información previa que xa posúen, de xeito que a estructura dos coñecementos previos condiciona os novos coñecementos e experiencias, e estes, á súa vez, modifican e reestruturan aquellos. Entre as ideas principais da aprendizaxe significativa destacan:

— os coñecementos previos deben estar relacionados cos novos que se pretende adquirir, de xeito que funcionen como base ou punto de apoio para a adquisición de coñecementos novos;

— é preciso desenvolver un amplo coñecemento metacognitivo para integrar e organizar os novos coñecementos;

— é preciso que a nova información se incorpore á estrutura mental e pase a formar parte da memoria comprensiva;

— a aprendizaxe significativa e a aprendizaxe mecanicista non se opoñen, senón que poden combinarse ao longo de todo o proceso de ensinanza;

— require una participación activa do estudante, onde a atención se centra en como se adquiren as aprendizaxes;

— preténdese potenciar que o estudante constrúa a súa propia aprendizaxe, levándoo cara a unha autonomía a través do proceso de andamiaxe. A intención última desta aprendizaxe é que o estudante adquira a competencia de aprender a aprender;

— a aprendizaxe significativa emprega os coñecementos previos para, mediante comparación ou intercalación cos novos coñecementos, armar un novo conxunto deles;

— a aprendizaxe significativa pode producirse mediante a exposición dos contidos por parte do docente ou por descubrimento do estudante.

Con respecto a este último punto, ao longo do desenvolvemento desta unidade tentaremos que os novos coñecementos se adquiran mesturando a partes iguais a aprendizaxe por descubrimento e a aprendizaxe por exposición.

Co fin de concretar o exposto anteriormente planéase unha metodoloxía desenvolvida ao longo de 12 sesións presenciais, nas que se mesturarán as clases expositivas por parte do profesor nas horas expositivas, xunto co traballo individual e en grupo por parte do alumnado durante as horas de laboratorio ou seminario. Ademais, contémplase a realización de sesións de titorías en grupos reducidos que sirvan para seguir dun xeito máis persoal e individualizado o proceso de ensinanza-aprendizaxe.

Por outra banda, en canto aos materiais que se empregarán pódense destacar os seguintes:

— o libro de texto. Servirá como guía para o profesor e como manual recomendado para os alumnos e alumnos. En concreto, recomendarase o libro NEUHAUSER, C. *Matemáticas para Ciencias* da editorial Pearson, edición de 2004. Consideramos que esta referencia aproxima de xeito óptimo os contidos que se van traballar ao longo da unidade, cunha boa proposta de exercicios e actividades;

— o software científico MATLAB. Este é un programa matemático que ofrece un contorno de desenvolvemento integrado e unha linguaxe de programación propia, e consideramos que será de grande utilidade tanto na realización de cálculos como na representación de gráficos relacionados co estudo e aplicación das ecuacións diferenciais. Este software atópase actualmente implementado en todos os ordenadores das aulas de informática da facultade de bioloxía, polo que o alumnado e o profesor poderán facer uso del sempre que o precisen;

— a ferramenta online *Fooplot*, en www.fooplot.com Este é un recurso gratuíto dispoñible na rede e que permite realizar representacións gráficas de funcións matemáticas de todo tipo, e será de grande utilidade durante as exposicións para que os alumnos e alumnas poidan visualizar o comportamento das ecuacións e modelos que se presentarán ao longo da unidade didáctica;

— boletíns de exercicios e prácticas que serán entregados periodicamente ao alumnado.

Nin que dicir ten que o tempo de traballo presencial na aula debe verse complementado cun traballo individual por parte dos alumnos e alumnas fóra do horario lectivo. De xeito xeral, estímanse unhas dúas horas de traballo persoal por cada hora de traballo na aula.

OS CONTIDOS BÁSICOS

En relación cos obxectivos formulados ao principio desta unidade didáctica, realízase a continuación a concreción dos contidos que se traballarán ao longo da mesma.

1. Básicos sobre ecuacións diferenciais

— Ecuación diferencial: definición, orde da ecuación, variables dependentes e independentes.

— Diferenza entre ecuación diferencial ordinaria (EDO) e ecuación en derivadas parciais (EDP).

— Solución dunha ecuación diferencial.

— Tipos particulares de ecuacións diferenciais ordinarias: ecuacións en variables separadas e ecuacións lineares.

— Problemas de valor inicial.

— Resultados de existencia e unicidade de solución para problemas de valor inicial: teoremas de Cauchy-Peano e Picard-Lipschitz.

2. Integración dalgúns tipos particulares de ecuacións diferenciais ordinarias de primeira orde.

— Método para a integración de ecuacións en variables separadas. Obtención da solución xeral. Resolución de problemas de valor inicial asociados.

— Método para a integración de ecuacións lineares. Obtención da solución xeral da ecuación xeral mediante a suma da solución xeral da ecuación diferencial homoxénea asociada e unha solución particular da ecuación linear completa. Método de variación de constantes. Resolución de problemas de valor inicial asociados.

3. Modelos biolóxicos que empregan ecuacións diferenciais.

— Modelos poboacionais. Ecuación de Malthus, ecuación Loxística, ecuación de Von Bertalanffy. Integración destas ecuacións. Poboacións límite. Resolución de problemas reais mediante a aplicación destes modelos.

— Modelo de arrefriamento de Newton. Integración da ecuación de Newton. Resolución de problemas reais que empreguen esta modelaxe.

— Lei de desintegración radioactiva. Integración da ecuación de desintegración. Semivida dunha substancia. Resolución de problemas reais que empreguen este modelo.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

Co fin de que os alumnos e alumnas alcancen os obxectivos propostos ao comezo desta unidade didáctica, proponse a continuación unha serie de activdades de aula que nos permitirán traballar cada un dos contidos enumerados na epígrafe anterior.

Como diciamos nos principios metodolóxicos, esta unidade levarase á aula ao longo de 12 sesións presenciais, distribuídas do seguinte xeito: 7 sesións expositivas, 3 sesións de seminario e 2 sesións de laboratorio. O que segue é unha proposta de desenvolvemento destas sesións.

1. Sesión expositiva nº 1: Motivación do estudo das ecuacións diferenciais

Co fin de motivar o estudo das ecuacións diferenciais, parece interesante motivar a atención dos estudantes amosando visualmente algunas das súas aplicacións en procesos da vida real. Deste xeito, ademais de conseguir chamar a súa atención e introducilos de xeito suave na unidade, podemos adiantar tamén algúns dos elementos do terceiro bloque de contidos.

Así, comezaremos a sesión proxectando tres documentais breves:

Prueba del Carbono 14 (2’ 09’’), en
http://www.youtube.com/watch?v=63aPTdLTJxY

El Carbono 14 (1’ 46’’), en
http://www.youtube.com/watch?v=iPfNAiWww9w

Ley de enfriamiento de Newton (3’ 03’’), en
http://www.youtube.com/watch?v=Q8thvAJRr7Q

Os dous primeiros explican brevemente como se realiza a datación de restos orgánicos a partir do método do carbono-14. Pola súa parte, no terceiro vídeo realízase un experimento físico para comprobar o cumplimento da lei de arrefriamento de Newton.

Unha vez visualizados os vídeos, e coa finalidade de que o alumnado matine un pouco sobre o contido dos mesmos e vaian abríndose á adquisición dos novos contidos, distribuirase aos estudantes en grupos de 4 persoas e deberán responder ás seguintes cuestións:

1) Explica coas túas palabras como se realiza a datación de restos fósiles a partir do método do Carbono-14.

2) No segundo vídeo dise que a vida media do Carbono-14 é de 5730 anos. Explica o significado desta afirmación.
3) Nun resto fósil observouse que conserva o 12.5 % de Carbono-14. Que idade aproximada teñen eses restos?
4) Explica coas túas palabras como varía, no experimento do terceiro vídeo, a velocidade de arrefriamento da auga segundo o paso do tempo. De que cres ti que depende esta velocidade?
5) Fai unha representación gráfica aproximada da variación da velocidade de arrefriamento frente ao tempo.
6) Cal das seguintes funcións pensas que aproxima mellor esa variación?

$$V(t)=kt\,;V(t)=-kt\,;V(t)=\mathrm{e}^{kt}\,;V(t)=\mathrm{e}^{-kt}$$

Despois de deixar un tempo duns 20-25 minutos para a realización desta actividade, realizarase unha posta en común das respostas. Ao final da sesión, o profesor indicará que as funcións que controlan ámbolos dous procesos se obteñen a partir da resolución de cadansúas ecuacións diferenciais asociadas, tal e como aprenderán ao longo do desenvolvemento da unidade didáctica.

2. Sesión expositiva nº 2: Conceptos básicos relativos a ecuacións diferenciais

Esta clase maxistral está destinada a introducir os conceptos e definicións básicas relativas a ecuacións diferenciais. Nela presentaranse formalmente as definicións de ecuación diferencial, orde da ecuación, tipos de variables, solución e diferencia entre ecuación diferencial ordinaria (EDO) e ecuación en derivadas parciais (EDP). A continuación presentaranse dous tipos particulares de EDO: en variables separadas e lineares. Ao remate desta sesión, entregarase aos alumnos e alumnas o Boletín de exercicios nº 1 (ANEXO 1) e indicaráselles que na seguinte sesión se traballarán os exercicios 1), 2), 3) e 4).

3. Sesión de seminario nº 1: Identificación de tipos de ecuacións e comprobación de solucións

Durante esta sesión de seminario distribuirase aos alumnos e alumnas por parellas e destinaranse os primeiros 30 minutos a que realicen os tres primeiros apartados dos exercicios 1) e 2) do Boletín 1 e o primeiro dos exercicios 3) e 4). Despois deste tempo, o profesor resolverá no encerado estas cuestións. Cómpre sinalar que os exercicios 3) e 4) poden presentar maior dificultade, posto que neles, e sen previo aviso para o alumno, se está introducindo os conceptos de problema de valor inicial e solución do mesmo. Parécenos que este xeito de facelo, sen previo aviso, é intersante, pois facilita por unha parte a motivación de introducir os contidos novos e por outra banda que o alumno se teña que enfrontar a eles facendo uso unicamente das súas ferramentas previas, facilitando deste xeito a aprendizaxe por descubrimento e a aprendizaxe significativa.

Estas tres primeiras sesións pretenden acadar o primeiro dos obxectivos formulados ao comezo da unidade didáctica.

4. Sesión expositiva nº 3: Resultados de existencia e unicidade de solución para PVI

Esta cuarta sesión consistirá nunha clase maxistral na cal se introducirá formalmente o concepto de problema de valor inicial, contido que xa fora presentado deliberadamente e sen previo aviso na sesión de seminario anterior. Unha vez presentado este concepto enunciaranse os dous resultados principais relativos a existencia e unicidade de solución para este tipo de problemas: os teoremas de Cauchy-Peano e Picard-Lipschitz. Para a comprensión destes resultados será preciso evocar algúns coñecementos previos relativos a funcións de varias variables reais que os alumnos xa deberon adquirir en anteriores unidades didácticas. Cómpre sinalar tamén que, aínda que o enunciado clásico do teorema de Picard-Lipschitz implica que a función que define a ecuación diferencial sexa «localmente lipschitziana» respecto da variable espacial, os alumnos e alumnas desta materia non manexan este concepto. É por iso que se enunciará unha versión máis feble deste resultado, na que se pide que a función que define a ecuación sexa simplemente «continuamente diferenciable» respecto da variable espacial.

Co fin de ilustrar este teorema, presentaráselles aos alumnos e alumnas o seguinte exemplo:

$$y' = y^{4/5}; y(0) = 0$$

Este problema de valor inicial admite dúas solucións definidas en toda a recta real: por un lado, a función identicamente nula e, por outro, a función

$$y(x) = \left(\frac{x}{5}\right)^5$$

Este é un exemplo ben ilustrativo, pois está baixo as hipóteses do teorema de Cauchy-Peano, pero admite duplicidade de solución. Isto é debido a que a función que define a ecuación non é continuamente diferenciable respecto da variable espacial, polo que neste caso non é aplicable o teorema de Picard-Lipschitz.

Unha vez presentados e ilustrados estes resultados, pediremos aos alumnos e alumnas que, por parellas, tenten resolver o exercicio número 5 do Boletín 1, que é de aplicación dos contidos que se acaban de traballar.

Con esta sesión traballamos o segundo dos obxectivos formulados ao comezo da unidade didáctica.

5. Sesión expositiva nº 4: Integración de ecuacións diferenciais en variables separadas

Esta sesión está destinada a explicar un contido eminentemente procedemental: a resolución de ecuacións diferenciais en variables separadas. Para iso ilustraremos o método a partir de varios exemplos extraídos do Boletín 1.

Comezaremos integrando a ecuación $y'=y^2$ (exercicio 6, apartado a)). Para facelo, dirémoslles que a reescriban na forma:

$$\frac{dy}{dx}=y^2$$

A continuación separamos as variables:

$$\frac{dy}{y^2}=dx$$

Agora podemos integrar nos dous membros para obter:

$$\frac{-1}{y}=x+C$$

Neste punto é habitual que os alumnos formulen a cuestión de por que non aparece unha constante de integración tamén no primeiro membro. De ser o caso, explicaráselles que o que se fai é asimilar ámbalas dúas constantes nunha única no segundo membro. Esta cuestión acostuma a turbar levemente aos estudantes, e teremos oportunidade de volver sobre ela máis adiante. O último paso na resolución da ecuación difrencial consiste en despexar a variable dependente facendo:

$$y(x)=\frac{-1}{x+C}$$

É interesante neste momento realizar a comprobación de que a función obtida é, en efecto, solución da ecuación diferencial.

Despois de obter a forma xeral da EDO, preguntaráselles aos estudantes acerca da resolución dalgúns problemas de valor inicial asociados a ela. Así por exemplo, interrogaráselles acerca de cal é a solución que pasa polo punto (1,1), o cal implica resolver a ecuación alxebraica

$$1=\frac{-1}{1+C},$$

que implica

$$C=-2,$$

polo que a solución do problema de valor inicial vén dada pola función:

$$y(x)=\frac{-1}{x-2}$$

Dúas cuestións interesantes para formular aos alumnos e alumnas neste momento son: que particularidade teñen as solucións que cruzan o eixo de ordenadas (son todas constantes) e que ocorre coas solucións que cruzan o eixo de abscisas (non existe ningunha).

Despois deste, ilustraremos o método de resolución de EDO en variables separadas cun novo exemplo (exercicio 8, apartado a)):

$$y'=3x^2y$$

Como antes, reescribimos a ecuación e separamos as variables:

$$\frac{dy}{y}=3\mathrm{x}^2 dx$$

Integrando novamente en ámbolos dous membros obtense:

$$\log y=x^3+C$$

Neste momento é conveniente, para que os estudantes non se «desconecten», preguntarlles acerca de como despexar a variable dependente. Agardamos que respondan «tomando exponenciais», e así o faremos, tratando de ter coidado á hora de manipular a constante de integración, pois este é un exemplo típico no que os estudantes amosan a súa «desconfianza» co que estamos a facer. Así, convén despexar en varios pasos, facendo algo como:

$$y(x)=\mathrm{e}^{x^3+C}\Rightarrow y(x)=\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{e}^{C}\Rightarrow y(x)=C\,\mathrm{e}^{x^3}$$

Se os alumnos se ven demasiado turbados pola substitución que se acaba de facer coa constante de integración, unha alternativa é empregar nomenclaturas diferentes para facerlles ver que se trata dun pequeno abuso de notación, pero totalmente lexítimo:

$$y(x)=\mathrm{e}^{x^3}+C_1\Rightarrow\ldots\Rightarrow y(x)=C_2 e^{x^3}$$

Ao igual que para o exemplo anterior, farase a comprobación de que a función obtida é solución da ecuación diferencial e resolveranse algúns problemas de valor inicial asociados a ela.

A última parte desta sesión destinarase a que os alumnos, de xeito individual, resolvan algunhas das ecuacións en variables separadas que aparecen nos exercicios 8, 9 e 10 do Boletín 1.

6. Sesión expositiva nº 5: Integración de ecuacións diferenciais lineares de primeira orde

Nesta sesión traballarase outro contido puramente procedemental: a resolución de ecuacións diferenciais lineares de primeira orde, da forma:

$$y'(x)+P(x)\,y(x)=Q(x)$$

Non sobra comezar a explicación convencendo aos estudantes de que toda ecuación linear se pode escribir na forma anterior, pois é unha cuestión que pode provocar algunha que outra dúbida no futuro.

É ben sabido que existe unha fórmula explícita que nos proporciona «de inmediato» a solución xeral da EDO anterior. Porén, non nos parece producente dar este método de resolución, pois implicaría por parte dos alumnos e alumnas un traballo meramente memorístico, inútil a medio prazo e que iría en contra dos nosos principios metodolóxicos de facilitar aprendizaxes por descubrimento. É por este motivo polo que optamos por construír a solución xeral da ecuación linear mediante o procedemento de «solución xeral da ecuación homoxénea asociada + solución particular da ecuación completa». Ademais, non nos parece en absoluto disparatado facer a demostración desta propiedade, pois é meramente constructiva e moi ilustrativa.

Inmediatamente amosaremos a aplicación deste método mediante un exemplo, a ecuación $y'+2y=3e^x$ (exercicio 8, apartado c))

Seguindo os pasos explicados, resolvemos primeiramente a ecuación homoxénea asociada, que é unha ecuación en variables separadas, do tipo que aprenderon a resolver na sesión anterior:

$$y'=2y\Rightarrow\ldots\Rightarrow y(x)=Ce^{-2x}$$

A continuación explicamos a obtención da solución particular da ecuación completa mediante o método de «variación de constantes», dicíndolle aos alumnos e alumnas que introduzan na ecuación completa a solución que acaban de obter, substituíndo a constante *C* por unha función *C(x)*:

$$\left(C(x)e^{-2x}\right)'+2C(x)e^{-2x}=3e^x$$

Resolvendo esta ecuación chégase a que a función *C(x)* debe satisfacer:

$$C'(x)=3e^{3x},$$

de onde se obtén

$$C(x)=e^{3x}$$

Así, a solución xeral da EDO linear vén dada por:

$$y(x)=Ce^{-2x}+e^{3x}$$

Como este é un método relativamente laborioso, convén repetir a explicación con algunha outra ecuación. Así por exemplo, pódese resolver tamén a ecuación d) do exercicio 8.

Os últimos minutos da sesión deixaranse para que os alumnos resolvan de xeito individual algunha das ecuacións lineares que aparecen nos exercicios 8 e 9 do Boletín 1.

7. Sesión de seminario nº 2: Resolución de ecuacións diferenciais en variables separadas e lineares

Esta sesión estará destinada a que os alumnos e alumnas adquiran destreza no manexo dos métodos de integración que se explicaron nas sesións anteriores. Para iso, durante os primeiros 30 minutos da sesión pediráselles que de xeito individual tenten resolver algunhas das ecuacións en variables separadas e lineares que aparecen no Boletín 1. Na segunda parte da sesión será o profesor o que resolva estas ecuaicións no encerado. É importante sinalar que para realizar correctamente estas actividades é imprescindible que os estudantes manexen con soltura os métodos de integración que se estudaron na Unidade Didáctica III, polo que é moi posible que haxa que recordar ou «refrescar» algúns dos procedementos xa explicados na mencionada unidade.

Chegados a este punto, os tres primeiros obxectivos formulados ao comezo da unidade didáctica deberían estar suficientemente elaborados.

8. Sesión de laboratorio nº1: Ecuacións diferenciais con MATLAB

Para esta sesión levarase aos estudantes á aula de informática, procurando na medida do posible de que se dispoña de un ordenador por persoa. O obxectivo desta sesión é que os alumnos e alumnas aprendan a usar o programa MATLAB como ferramenta para a resolución de ecuacións diferenciais ordinarias. A estes efectos, dáse por suposto que nas anteriores unidades didácticas xa realizaron prácticas con este programa e que, polo tanto, xa posúen certa destreza no manexo deste software.

Comezaremos entregando a folla da práctica (ANEXO 3), indicando que a mesma se realizará en dúas partes, ao longo de dúas sesións de laboratorio. Utilizando esta folla como guía, o profesor introducirá os comandos de MATLAB necesarios para resolver ecuacións diferenciais e problemas de valor inicial e, con esta bagaxe, empregarase o programa para resolver as ecuacións e PVI que se propoñen no Boletín nº 1.

Esta sesión, ademais de contribuír á consecución do quinto obxectivo formulado ao comezo da unidade didáctica, contribúe tamén en certa medida á consolidación dos tres anteriores.

9. Sesión expositiva nº 6: Modelos poboacionais

Nesta sesión comezarase co estudo dalgúns procesos biolóxicos modelados mediante ecuacións diferenciais. Máis concretamente, nesta hora estudaranse os modelos poboacionais de Malthus, loxístico e de von Bertalanffy.

Para introducir a ecuación de Malthus formularase aos alumnos e alumnos a seguinte pregunta: «de que pensades que depende a velocidade á que se reproduce unha determinada poboación?» Agardamos que alguén responda que a maior cantidade de individuos maior taxa de reprodución, resposta que nos valerá para introducir o modelo malthusiano, que propón precisamente que unha poboación se reproduce a unha velocidade proporcional ao número de individuos que hai en cada instante. Esta idea permítenos introducir a expresión matemática

$$p'(t)=k\,p(t),$$

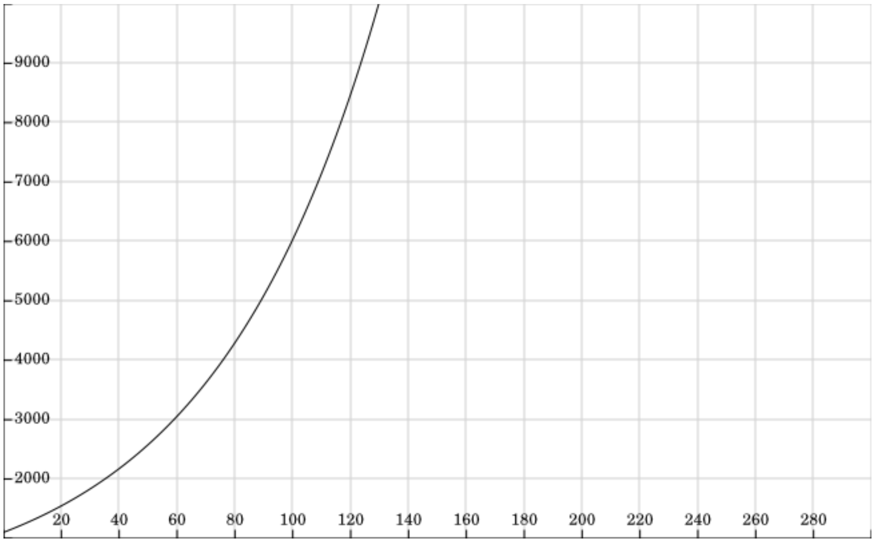
que é unha ecuación diferencial en variables separadas e que, polo tanto, xa saben resolver, obténdose

$$p(t)=p(0)e^{kt},$$

onde *p(0)* é a poboación no instante inicial e *k* é unha constante que dependerá da propia poboación.

Co fin de ilustrar este modelo e a obtención do parámetro *k* resolveremos o exercicio 6 do Boletín nº 2 (ANEXO 2).

É interesante despois disto interrogar aos estudantes sobre a cuestión de se lles parece que o modelo malthusiano presenta algún inconveniente. Como é moi probable que nun primeiro momento non se lles ocorra ningunha resposta, faremos a representación gráfica de como evolucionaría a poboación da India se seguise o modelo que se presenta no exercicio que se acaba de resolver. Para facer esta representación empregarase desde o ordenador do profesor unha ferramenta gratuíta dipoñible na rede, chamada *Fooplot*, que permite realizar online representacións gráficas de funcións que despois poderemos descargar ao noso computador: www.fooplot.com



Ao realizar a representación gráfica observamos que a medida que pasa o tempo a poboación crece indefinidamente, fenómeno que non se corresponde co comportamento real de ningunha poboación, pois existen factores externos, como por exemplo a limitación dos recursos, que impiden unha reprodución indefinida dos individuos. Este feito permítenos xa motivar a introdución da ecuación loxística, a cal modela precisamente a limitación dos recursos e soluciona o problema do crecemento indefinido da poboación.

En canto ao xeito de presentar a ecuación loxística, parécenos máis conveniente facelo na forma polinómica

$$p'(t) = a\,p(t) - b\,p(t)^2,$$

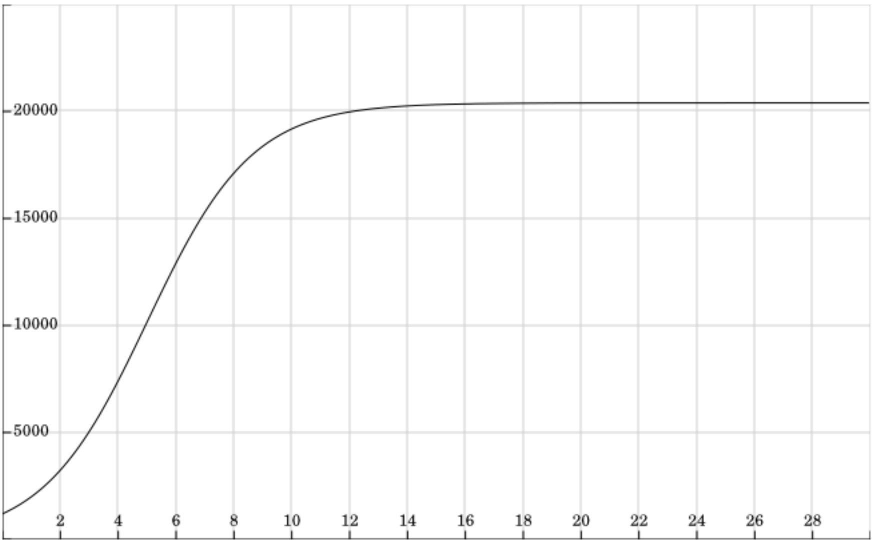
deste xeito obsérvase esta ecuación como unha «evolución» do modelo malthusiano no que se introduce un termo que limita o crecemento e depende do cuadrado da poboación, no sentido de que representa as «interaccións» entre os individuos que compiten polos recursos dispoñibles.
Esta é unha EDO en variables separadas e, como tal, podemos resolvela tal e como explicamos aos estudantes, obtendo a solución:

$$p(t)=\frac{p(0)a}{p(0)b+(a-p(0)b)e^{-at}}$$

Despois de obter a solución é interesante amosar o feito de que, en efecto, esta ecuación non admite un crecemento ilimitado da poboación, feito que amosaremos calculando o límite

$$\lim_{t\to\infty} p(t)=\frac{a}{b}$$

Ao igual que se fixo co modelo malthusiano, é conveniente ilustrar os novos contidos cun exemplo, e a estes efectos resulta apropiado e exercicio nº 8 do Boletín 2. A representación gráfica da función que se obtén neste exemplo permite comparar a evolución prevista polo modelo loxístico (converxencia cara á poboación límite) fronte ao modelo malthusiano (crecemento indefinido):



Chegados a este punto, é conveniente presentar algún exemplo real no que se observe que, tal e como insinuabamos, o modelo loxístico aproxima máis fidedignamente que o malthusiano o comportamento real da poboación. Para iso, presentarase a seguinte táboa na que se amosa na segunda columna o censo real da poboación de EEUU entre os anos 1790 e 1980, na segunda, a evolución prevista polo modelo de Malthus con datos de 1790 e 1800 e na terceira, a evolución prevista polo modelo loxístico:

Ano	Censo de Estados Unidos	Modelo malthusiano	Modelo loxístico
1790	3,93	3,93	3,93
1800	5,31	5,31	5,30
1810	7,24	7,18	7,13
1820	9,64	9,70	9,58
1830	12,87	13,10	12,82
1840	17,07	17,70	17,07
1850	23,19	23,92	22,60
1860	31,44	32,32	29,70
1870	39,83	43,67	38,65
1880	50,16	59,01	49,69
1890	62,95	79,73	62,95
1900	75,99	107,73	78,37
1910	91,97	145,57	95,64
1920	105,71	196,69	114,21
1930	122,78	265,77	133,28
1940	131,67	359,11	152,00
1950	151,33	485,24	169,56
1960	179,32	655,66	185,35
1970	203,21	885,93	199,01
1980	226,50	1197,08	210,46

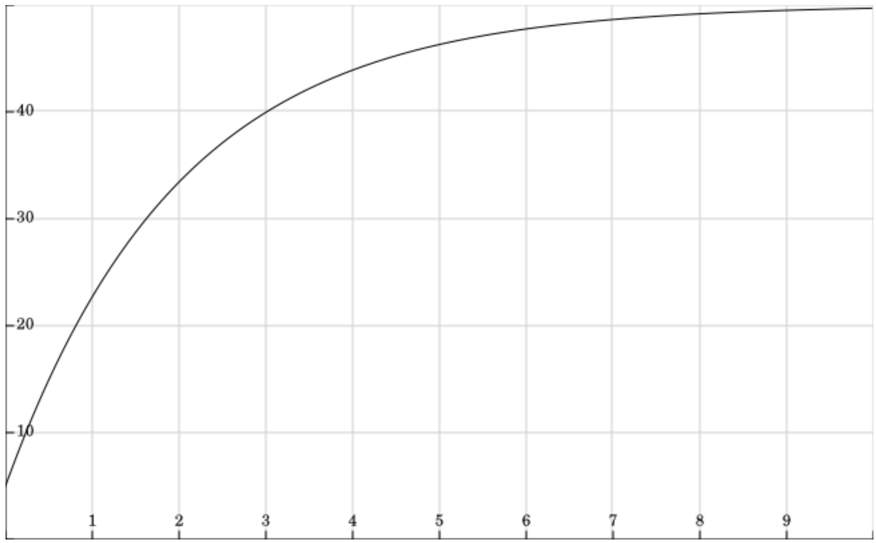
A última parte da sesión dedicarase á presentación da ecuación de Von Bertalanffy, que modela a evolución da talla dos individuos dunha poboación en función da distancia respecto á unha talla límite:

$$L'(t)=k(L_\infty-L(t)),\, L_\infty>0$$

Trátase dunha ecuación linear que os alumnos xa saben resolver, obtendo

$$L(t)=(L(0)-L_\infty)e^{-kt}+L_\infty$$

Coma sempre, é moi conveniente ilustrar o comportamento do modelo facendo unha representación gráfica das solucións:



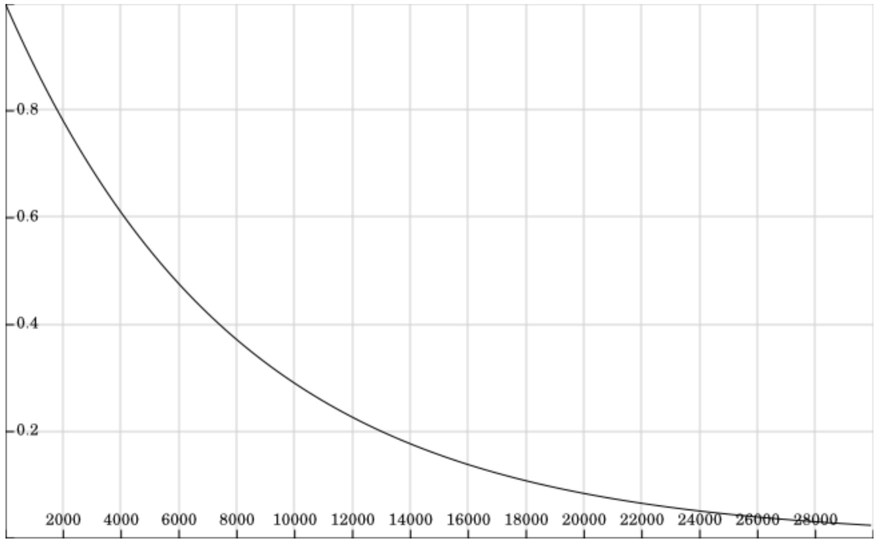
10. Sesión expositiva nº 7: Modelos de desintegración radioactiva e de arrefriamento

Nesta sesión continuarase co estudo dalgúns procesos da natureza que se poden modelar mediante ecuacións diferenciais. Será este momento de lembrar a actividade de motivación que se levou a cabo na primeira sesión e, tomando esas ideas intuitivas como punto de partida, presentar formalmente os modelos de desintegración radioactiva e de arrefriamento.

Nun dos vídeos daquela primeira sesión introdúcese, sen nomealo, o concepto de semivida ou vida media dunha substancia radioactiva. Isto faise cando se di que unha mostra de Carbono-14 tarda 5730 anos en reducirse á metade, independentemente do tamaño inicial da mostra. De aquí podemos axudar os estudantes a deducir dúas cousas: en primeiro lugar, que a desintegración non é un proceso linear no tempo e, en segundo lugar, que a velocidade de desintegración depende da propia cantidade de substancia que hai en cada instante. Esta afirmación permítenos introducir formalmente a ecuación da desintegración radioactiva:

$$x'(t) = -k\,x(t)$$

Esta é unha ecuación en variables separadas, do tipo que os alumnos e alumnas saben integrar. Ademais, é interesante propoñerlles que deduzan a partir da solución da ecuación a expresión que proporciona a semivida dun composto radioactivo, co fin de, unha vez máis, facilitar a adquisición de aprendizaxes por descubrimento e non meramente memorísticas. A continuación, o profesor ilustrará o uso desta ecuación na resolución dos exercicios 19 e 20 do boletín 2 que, precisamente, versan sobre o método do Carbono-14. Ao graficar con *Fooplot* a solución do exercicio 19 podemos facernos unha idea do comportamento previsto pola lei de desintegración radioactiva:

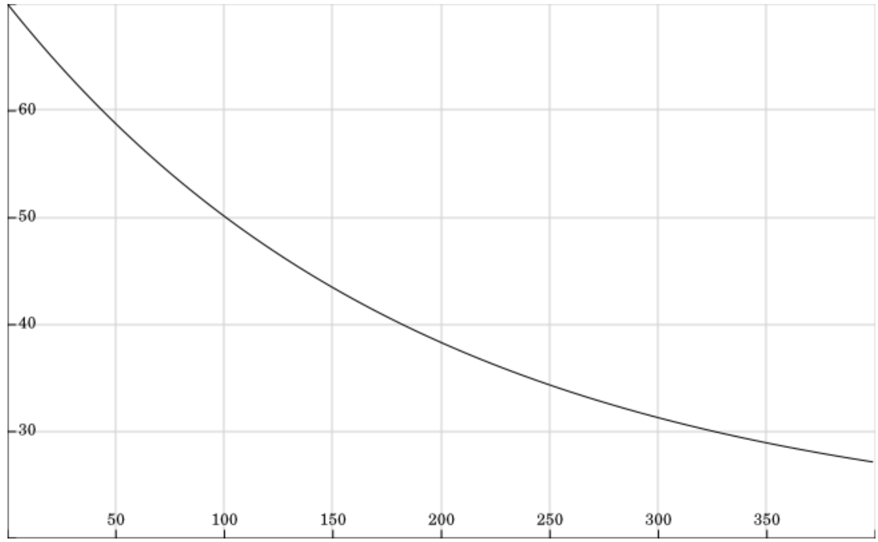


Por último, para introducir a lei de arrefriamento de Newton farase novamente mención ao vídeo introductorio. Nese vídeo observábase perfectamente que a velocidade de arrefriamento do líquido non era lineal e, despois do que xa coñecen acerca da desintegración de substancias radioactivas, non lles resultará estraña a afirmación que lles faremos de que esa velocidade segue tamén un ritmo exponencial, dependendo da diferencia entre a temperatura da substancia e a temperatura do medio. Poderemos deste xeito introducir xa formalmente a ecuación da lei de arrefriamento de Newton:

$$T'(t) = -k(T(t) - M)$$

É interesante facer notar aquí unha diferencia importante con respecto ao modelo de desintegración estudado anteriormente: no que se presenta agora o signo da derivada pode variar dependendo do signo de *(T-M)*. Unha vez resaltado este feito, cómpre preguntar aos estudantes acerca do significado físico desta propiedade, co fin de que sexan quen de descubrila sen a intervención do profesor. O significado non é outro que o seguinte: se a substancia se introduce nun medio máis frío, entón a substancia perde temperatura *(T'<0)*. Se pola contra se introduce nun medio máis quente, entón a substancia gaña temperatura *(T'>0)*. Alguén poderá percatarse entón do «paradoxo» de que a lei de arrefriamento tamén modele quecementos.

Unha vez presentado formalmente o modelo, ilustrarase resolvendo os problemas 21 e 22 do Boletín 2, sen esquecernos de facer a representación gráfica con *Fooplot*, que nos permitirá asimilar dun xeito óptimo a evolución prevista pola lei de arrefriamento de Newton:



11. Sesión de seminario nº3: Resolución de problemas relacionados coa modelaxe

Coa fin de que os alumnos e alumnas adquiran destreza e se familiaricen na resolución dos problemas que se presentaron nas dúas sesións anteriores, adicaranse 30 minutos de seminario a que os estudantes, de xeito individual, tenten resolver pola súa conta algúns dos problemas propostos no Boletín nº 2, que fan referencia aos 5 modelos estudados nas sesións expositivas. Como é habitual, na segunda parte da sesión o profesor resolverá ditos problemas no encerado. Esta resolución pode vir acompañada, se o tempo así o permite, coa realización da representación gráfica das soluciósns en *Fooplot*.

O traballo realizado nestas catro últimas sesións está destinado principalmente á consecución do cuarto dos obxectivos formulados ao comezo da unidade didáctica.

12. Sesión de laboratorio nº2: Modelos matemáticos con MATLAB

Esta última sesión da unidade didáctica levarase a cabo na aula de informática, e terá como obxectivo a realización da segunda parte da práctica iniciada na primeira sesión de laboratorio. Máis concretamente, os alumnos e alumnas tentarán, coa axuda do profesor, resolver con MATLAB os dous exercicios que se propoñen ao final da folla de práctica xa entregada (ANEXO 3). Estes exercicios presentan dous modelos de tipo poboacional, relativo aos cales se pide a resolución de certos problemas de valor inicial asociados, a obtención de predicións segundo o modelo e a elaboración de representacións gráficas. Preténdese deste xeito que os estudantes coñezan unha ferramenta alternativa / complementaria para resolver problemas do tipo proposto no Boletín 2. As actividades levadas a cabo nesta última sesión permiten traballar o quinto dos obxectivos formulados ao inicio da unidade, así como a consolidación do cuarto deles.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

O proceso de ensinanza-aprendizaxe non estaría completo se non realizaramos unha análise do grado de consecución dos obxectivos por parte dos alumnos e alumnas. É por este motivo polo que debemos realizar unha avaliación global do proceso, avaliación que permita tamén ao profesor, en certo modo, valorar criticamente o seu labor docente. Para este fin, proponse un proceso de avaliación da unidade didáctica que se desenvolverá en tres tempos: avaliación inicial, avaliación procesual e avaliación final ou sumativa.

Avaliación inicial

A avaliación inicial ten como obxectivo medir o nivel dos coñecementos previos cos que os estudanten afrontan a nova unidade didáctica, e realízase principalmente durante a primeira sesión, a de motivación da unidade, que obriga aos alumnos e alumnas a enfrontarse «a pelo» aos novos contidos valéndose unicamente dos seus coñecementos anteriores.

Avaliación procesual

A avaliación procesual mide a consecución dos obxectivos ao longo de todo o desenvolvemento da unidade didáctica. Para realizar este proceso, o profesor valerase principalmente da participación de cada estudante nas clases, a realización dos exercicios e prácticas propostas, así como do interese e actitudes amosados ao longo da unidade.

Avaliación final ou sumativa

A avaliación final da consecución dos obxectivos realizarase tendo en conta todo o traballo realizado diariamente polos alumnos e alumnas ao longo do desenvolvemento da unidade didáctica. Posto que ademais esta trátase da última unidade do curso, ao remate da mesma elaborarase un exame escrito que incluirá os contidos desta e das unidades anteriores.

A cualificación final da unidade didáctica virá dada por un número entre 0 e 10, tendo en conta para iso nun 40% o traballo desenvolvido polo estudante ao longo da súa elaboración e nun 60% a valoración das preguntas do exame relativas á mesma.

BIBLIOGRAFÍA

AUSUBEL, D (1960): «*The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal material* », Journal of Educational Psychology, 51, 267-272.

— (1963): *The Psychology of Meaningful Verbal Learning*, New York: Grune & Stratton.

— (1978): «*In defense of advance organizers: A reply to the critics*», Review of Educational Research, 48, 251-257.

— , J. NOVAK E H. HANESIAN (1978), *Educational Psychology: A Cognitive View (2nd Ed.),* New York: Holt, Rinehart & Winston.

NEUHAUSER, C (2004): *Matemáticas para Ciencias*, Madrid: Pearson Educación.

Citas de recursos en internet:

Ferramenta de representación gráfica *Fooplot:* www.fooplot.com [citado o 12 de xullo de 2012]

AGRADECEMENTOS

O autor quere agradecer aos profesores Mª del Pilar Mato Eiroa e Xan Manuel Caínzos Prieto o seu permiso para empregar nesta unidade didáctica algúns dos boletíns e prácticas que eles elaboraron para a docencia da materia «Matemáticas para bioloxía» durante o curso 2011-2012 e que se inclúen como anexos. Cómpre mencionar que estes boletíns son tamén froito de evolucións e melloras levadas a cabo por anteriores profesores desta materia.

ANEXO 1

Boletín de Exercicios n° 1

1. A continuación preséntase unha listaxe dalgunhas ecuacións diferenciais, xunto con algún dos eidos nos que se aplican. Clasifica cada unha delas como ecuación diferencial ordinaria (EDO) ou ecuación en derivadas parciais (EDP), proporciona a orde e indica as variables dependentes e independentes. Se a ecuación diferencial é ordinaria, sinala se é lineal ou non lineal.

   a) $\dfrac{dp}{dt} = kp,\ k > 0$
   (Ecuación de Malthus. Dinámica de poboacións)

   b) $\dfrac{dp}{dt} = ap - bp^2,\ a > 0,\ b > 0$
   (Ecuación loxística. Epidemioloxía)

   c) $\dfrac{dx}{dt} = -kx,\ k > 0$
   (Lei da desintegración radioactiva. Determinación de idades arqueolóxicas)

   d) $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - M),\ k > 0,\ M \in \mathbb{R}$
   (Lei do arrefriamento de Newton. Medicina forense)

   e) $\dfrac{dL}{dt} = k(L_\infty - L),\ k > 0,\ L_\infty > 0$
   (Ecuación de von Bertalanffy. Estudo do crecemento dos peixes)

   f) $\dfrac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x),\ \alpha > 0,\ p > 0,\ q > 0$
   (Velocidade dunha reacción química de orde 2. Cinética química)

   g) $y\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right) = c,\ c > 0$
   (Problema da braquistócrona. Cálculo de variacións)

   h) $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + b\dfrac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos\gamma t,\ m > 0,\ b > 0,\ k > 0,\ F_0 \geq 0,\ \gamma \geq 0$
   (Ecuación das vibracións mecánicas forzadas. Mecánica, circuítos eléctricos)

   i) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0,\ k > 0$
   (Ecuación da calor. Dinámica de fluídos, fenómenos de difusión de calor e de contaminantes)

   l) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0,\ c \in \mathbb{R}$
   (Ecuación de ondas. Elasticidade, fenómenos de propagación de ondas acústicas ou electromagnéticas)

   m) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
   (Ecuación de Laplace; Teoría do potencial, fenómenos caloríficos ou de propagación de ondas estacionarias)

2. En cada un dos seguintes casos comproba que a función dada é solución da correspondente EDO. Determina despois un valor da constante C de modo que a solución satisfaga a condición inicial dada:

   a) $y(x) = Ce^{-x},\ y' + y = 0,\ y(0) = 2$
   b) $y(x) = Ce^{2x},\ y' = 2y,\ y(0) = 3$
   c) $y(x) = Ce^{-x} + x - 1,\ y' = x - y,\ y(0) = 10$
   d) $y(x) = Ce^{-x^3},\ y' + 3x^2y = 0,\ y(0) = 7$
   e) $y(x) = \ln(x + C),\ e^y y' = 1,\ y(0) = 0$
   f) $y(x) = (x + C)\cos x,\ y' + y\tan x = \cos x,\ y(\pi) = 0$

3. Proba que $f(x) = Ce^{3x} + 1$ é solución da EDO $y' - 3y = -3$ para calquera elección da constante C, polo que é unha familia uniparamétrica de solucións da ecuacion. Determina o valor de C para que se satisfaga a condición inicial nos seguintes casos:

   a) $y(0) = 2$,   *b*) $y(1) = 1$.

4. Proba que $f(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$ é solución da EDO $y'' + y' - 6y = 0$ para calquera elección das constantes C_1 e C_2, polo que é unha familia biparamétrica de solucións da EDO. Determina os valores de C_1 e C_2 para que se satisfagan as seguintes condicións iniciais:

   a) $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$,   *b*) $y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$.

5. Determina se o teorema de Picard garante a existencia e unicidade de solución dos problemas de valor inicial (PVIs) dos exercicios 7, 9 e 10.

6. Obtén a solución xeral das seguintes ecuacións diferenciais:

   a) $y' = y^2$,   *b*) $y' = y - y^2$,   *c*) $y' = (3 - y)(2 - y)$,

   d) $y' = 3x^2(1 + y^2)$,   *e*) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{y^2}$,   *f*) $y' = \dfrac{1}{xy^3}$.

7. Nos casos seguintes, resolve o PVI indicado:

   a) $y' = y^2, \quad y(1) = 2$,   *b*) $y' = \dfrac{-x^2}{2y}, \quad y(0) = 2$,

   c) $y' = 8x^3e^{-2y}, \quad y(1) = 0$,   *d*) $y' = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{2y + 1}, \quad y(0) = -1$.

8. Nos casos seguintes, resolve a EDO dada:

   a) $y' = 3x^2y$,   *b*) $y' = y(2 + \operatorname{sen} x)$,   *c*) $y' = -2y + 3e^x$,

   d) $y' = -4y + x^2e^{-4x}$,   *e*) $y' = \dfrac{2y}{x} + x^2 \cos x$,   *f*) $y' = -\dfrac{3y}{x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$.

9. Nos casos seguintes, resolve o PVI indicado:

   a) $y' = \dfrac{y}{x} + xe^x, \quad y(1) = e - 1$ *b*) $y' = -4y + e^{-x}, \quad y(0) = \dfrac{4}{3}$

   c) $x^3y' + 3x^2y = x, \quad y(2) = 0$ *d*) $\cos x\, y' + y \operatorname{sen} x = 2x \cos^2 x, \quad y(0) = 3$

10. Resolve os PVIs, cuxas ecuacións xorden en xenética, seguintes:

   a) $v' = k\dfrac{v}{2 - v}, \quad v(0) = 1$

   b) $y' = L\Big(1 - \dfrac{y - 1}{M}\Big)^m$, sendo $L > 0$, $M > 0$, $m = 1, 2, 3$; $\quad y(0) = 1$

ANEXO 2

Boletín de Exercicios n° 2

1. Considérese unha poboación de *Microtus Arvallis Pall*, un pequeno roedor que se reproduce rapidamente. Suponse que dita poboación crece segundo o modelo de Malthus cunha taxa relativa $k = 0,4$, onde a unidade de tempo é o mes. Para unha poboación inicial de 2 roedores, calcula o seu número ao cabo de 10 meses. *Sol.: 109 roedores*

2. Certa poboación duplica o seu tamaño inicial en 10 anos e triplícao en 20 anos. É posible que siga a lei de Malthus?

3. A introdución dun patóxeno nun cultivo de bacterias causa a súa diminución segundo a lei $b' = -2b$, onde $b(t)$ é o número de bacterias no instante t en horas. Determina o tempo que ten de transcorrer ata que só quede o 1 % da cantidade de bacterias inicial. *Sol.: 2 horas e 18 minutos*

4. No *Informe sobre desenvolvemento humano 2005*, feito público polo Programa para o Desenvolvemento das Nacións Unidas (PNUD) sinálase o aumento da poboación mundial, que pasou de 4 068 millóns de habitantes en 1975 a 6 035 millóns en 2003. Supondo que a poboación medra segundo o modelo de Malthus, calcula a prevista para o ano 2015. *Sol.: 7146 millóns*

5. Segundo datos da organización UNICEF, China con 1 315 millóns de habitantes, en 2005, medra cunha taxa anual do 0,9 %. Supondo que a devandita poboación medra segundo o modelo de Malthus, calcula a prevista para o ano 2015. *Sol.: 1 439 millóns*

6. Segundo datos da organización UNICEF, a India con 1 103 millóns de habitantes, en 2005, medra cunha taxa anual do 1,7 %. Supondo que a súa poboación medra seguno o modelo de Malthus e usando os datos do exercicio anterior, deduce cando terán a mesma poboación os dous países. *Sol.: año 2027*

7. Deduce a regra do 70 (Brewer, p. 89 [1]) que se usa para poboacións que medran exponencialmente e di que para calcular, aproximadamente, o número de anos para que unha poboación duplíquese abonda con dividir 70 pola porcentaxe anual de crecemento.

8. Unha asociación para a conservación da Natureza ceiba 1200 troitas de río nun lago. Estímase que a capacidade límite ou de soporte do lago para a especie é de 20400. Despois do primeiro ano, hai 2000 troitas no lago.

   a) Atopa a función de poboación de troitas no lago, supoñendo que satisface a ecuación loxística.

   b) Calcula o número de troitas no lago despois de 8 anos.

   c) Calcula ao cabo de canto tempo o número de troitas será de 5000.

   d) Determina cando medrará mais rápidamente a poboación.

   Sol.: $p(t) = 20400/(1 + 16\exp(-0,5534t))$; 17126 troitas; 3 anos; 5 anos

9. En 1889 a poboación de certo país era de 50 millóns de habitantes e medraba a razón de 750 000 persoas por ano. Ademais, en 1944 a poboación era de 100 millones y medraba a razón de 1 millón por ano. Supón que a poboación satisfai a ecuación loxística. Acha a poboación límite, cando medrou máis rapidamente e a prognosticada para o ano en curso. *Sol.: 200 millóns, no ano 1944, 157 millóns*

10. A poboación dun cultivo de protozoos *Paramecium Caudatum* medra segundo o modelo loxístico:

$$p' = ap - bp^2,$$

    con $a = 2,309$ e $b = 6,157 \times 10^{-3}$. Se inicialmente colocáronse 5 exemplares de *Paramecium* nun tubo de ensaio, calcula a poboación límite. *Sol.: 375 exemplares*

11. Supón que un estudante portador dun virus de gripe regresa a un campus universitario illado que ten 1000 estudantes e que a velocidade de propagación do virus é proporcional non só ao número de estudantes contaxiados, senón tamén, ao número de alumnos non contaxiados. Determina o número de estudantes contaxiados logo de 6 días, cando tense que logo de 4 días o devandito número é de 50. Deduce cando medrará máis rapidamente a poboación contaxiada. *Sol.: 276 estudantes, despois de 7 días*

[1] R. Brewer, *The science of Ecology*, Saunders College Publishing, 1988.

12. Se a metade de certa cantidade de radio desintégrase en 1 600 anos, deduce a porcentaxe da cantidade orixinal que queda despois de 3200 anos. *Sol.: 25 %*

13. O isótopo radioactivo do kriptón-85 é un gas inerte radioactivo cunha semivida de 10,76 anos que se produce na fisión do uranio e do plutonio. Deduce a porcentaxe da cantidade orixinal que queda ao cabo de 43,04 anos. *Sol.: 6,25 %*

14. O polonio-210 ten unha semivida de 138 días. Se unha mostra da devandita sustancia ten unha masa de 800 μg (1 $\mu\text{g} = 10^{-6}$g), calcula a súa cantidade despois de 23 meses. *Sol.:* 25 μg

15. O isótopo radiactivo do chumbo ^{209}Pb ten unha semivida de 3,3 horas. Se no instante inicial hai 1 gramo de chumbo, acha o tempo que transcorrerá para que se desintegre o 90 % de dita cantidade. *Sol.: 11 horas*

16. Inicialmente había 100 mg dunha sustancia radiactiva. Logo de 6 horas, a masa diminueu un 3 %. Calcula a cantidade de sustancia despois de 24 horas. Acha a semivida da sustancia radiactiva descrita. *Sol.: 89 mg, 137 horas*

17. A causa do accidente do reactor nuclear de Chernobyl, en abril de 1986, quedou no aire cesio radiactivo ^{137}Cs, que ten unha semivida de 27,9 anos. Acha a constante de desintegración do ^{137}Cs. Calcula cando haberá soamente o 25 % da cantidade inicial. Determina cando haberá soamente o 20 % da cantidade inicial. *Sol.: 0,02484, 56 anos, 65 anos*

18. A semivida do cobalto radiactivo ^{60}Co é de 5,27 anos. Supón que un accidente nuclear deixou que o nivel de cobalto radioactivo ascenda en certa rexión a 100 veces o nivel aceptable para a vida humana. Acha o tempo que ten de transcorrer para que a rexión volva ser habitable, ignorando a posible presenza doutros elementos radioactivos. *Sol.: 35 anos*

19. En 1950 analizouse un fragmento dunha cadeira atopada na tumba de Tutankhamon, e determinouse que se desintegrara o 34 % de C-14. Tendo en conta que a semivida do C-14 é de, aproximadamente, 5 600 anos, determina a data de fabricación da cadeira. *Sol.: 1407 A.C.*

20. Nunha cova de Sudáfrica atopáronse un cranio humanoide xunto cos restos dunha fogueira. Os arqueólogos cren que a idade do cranio é igual á da fogueira. Estableceuse que soamente un 2 % da cantidade orixinal de C-14 queda na madeira queimada da fogueira. Calcula a idade do cranio. *Sol.: 31 606 anos*

21. Nun laboratorio cuxa temperatura é de 21 °C déixase arrefriar un termómetro de mercurio con temperatura inicial de 70 °C e despois de 100 segundos marca 50 °C. Canto tempo necesitarase para que se arrefríe desde a temperatura inicial ata 30 °C? *Sol.: 323 segundos*

22. Utilizando os mesmos datos do exercicio anterior, calcula a temperatura do termómetro despois de 400 segundos. *Sol.:* $27\,°C$

23. Denota por $L(t)$ a lonxitude dun peixe no instante t e supón que medra de acordo coa ecuación de von Bertalanffy (forma máis sinxela de crecemento restrinxido):

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L), \quad k > 0 \text{ e } L_\infty > 0,$$

con condición inicial $L(0) = 3$. Un estudo mostra que a lonxitude límite do peixe é de 369 cm e que tarda 27 meses en acadar a metade da devandita lonxitude límite. Calcula o valor de k. Determina a lonxitude do peixe aos 10 meses. *Sol.: 0,02537, 85 cm*

24. Supón que a lonxitude dun peixe $L(t)$, medida en cm, no tempo t, medido en meses, verifica a ecuación de von Bertalanffy:

$$L' = 0,21(54 - L)\,.$$

Se a súa lonxitude inicial é de 2 cm, deduce a súa lonxitude límite. *Sol.: 54 cm*

25. A velocidade coa que unha medicina espállase no torrente sanguíneo descríbese mediante la EDO:

$$x' = r - kx\,,$$

sendo r e k constantes positivas. A solución $x(t)$ de tal EDO verificando a condición inicial $(0, 0)$, dá a concentración do fármaco no sangue no instante t. Calcula o valor límite da devandita concentración, $\lim_{t\to+\infty} x(t)$. *Sol.:* $\frac{r}{k}$

ANEXO 3

Práctica de laboratorio: Ecuacións diferenciais con MATLAB

Unha das aplicacións máis interesantes do cálculo matemático simbólico de MATLAB é a resolución de EDOs.

Para resolver un PVI de orde 1 emprégase o comando `dsolve`, con sintaxe:

```
sol=dsolve('EDO','condición inicial','variable de integración')
```

Para resolver un PVI de orde n emprégase o comando `dsolve`, con sintaxe:

```
sol=dsolve('EDO','ci1, ci2, ..., cin','variable de integración')
```

Debe terse en conta que:

- Eliminando a ou as condicións iniciais resólvese a correspondente EDO.
- A derivada indícase poñendo a letra `D` diante da variable dependente. Así, y' escríbese `Dy`. No caso de derivadas de orde superior, a letra `D` debe ir seguida dun número que indique a orden da derivada. Así, y'' escríbese `D2y`, y''' é `D3y`, etc.
- Por defecto, a variable de integración é `t`.
- O resultado da aplicación deste comando é sempre unha expresión simbólica.

Como primeiro exemplo, calcúlase a solución xeral da EDO $y' + y = 0$:

```
>> sol=dsolve('Dy+y=0','x')

sol =

C1*exp(-x)
```

O PVI:

$$\begin{cases} y' + y = 0, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

resólvese engadindo a condición inicial:

```
>> sol=dsolve('Dy+y=0','y(0)=2','x')

sol =

2*exp(-x)
```

Pódese comprobar que a expresión que devolve MATLAB é a correcta, empregando os comandos `diff` e `subs`:

```
>> syms x
>> diff(sol,x)+sol

ans =

0

>> subs(sol,x,0)

ans =

     2
```

A continuación resólvense algúns PVIs do boletín de exercicios 4:

```
>> sol=dsolve('Dy=x-y','y(0)=10','x')

sol =

x-1+11*exp(-x)

>> sol=dsolve('exp(y)*Dy=1','y(0)=0','x')

sol =

log(x+1)

>> sol=dsolve('Dy+y*tan(x)=cos(x)','y(pi)=0','x')

sol =

cos(x)*x-cos(x)*pi

>> sol=dsolve('D2y+Dy-6*y=0','y(0)=2,Dy(0)=1','x')

sol =

3/5*exp(-3*x)+7/5*exp(2*x)

>> sol=dsolve('D2y+Dy-6*y=0','y(1)=1,Dy(1)=0','x')

sol =

2/5*exp(3)*exp(-3*x)+3/5*exp(-2)*exp(2*x)

>> sol=dsolve('Dy=8*x^3*exp(-2*y)','y(1)=0','x')

sol =

1/2*log(4*x^4-3)

>> sol=dsolve('cos(x)*Dy+y*sin(x)=2*x*(cos(x))^2','y(0)=3','x')

sol =

cos(x)*x^2+3*cos(x)

>> sol=dsolve('Dy=L*(1-(y-1)/M)','y(0)=1','x')

sol =

M+1-exp(-L/M*x)*M

>> sol=dsolve('Dy=L*(1-(y-1)/M)^2','y(0)=1','t'); sol=simple(sol)

sol =

(L*t*M+L*t+M)/(L*t+M)
```

Tamén se empregarán nesta práctica os comandos:

`solve(ecu)`	resolve `ecu=0`, sendo `ecu` unha expresión simbólica nunha variable
`ginput(n)`	devolve as coordenadas de `n` puntos situados nunha ventá gráfica

Práctica MATLAB: Exercicios

Apelidos	Nome	DNI

Resolve os seguintes exercicios no teu ordenador e apunta os comandos MATLAB empregados

1. A biomasa é unha medida da cantidade de materia que vive nun ecosistema. Supón que a biomasa nun ecosistema dado increméntase a una taxa de, aproximadamente, 3,5 toneladas por ano, e decrece, aproximadamente, cunha porcentaxe do 1,9 % anual. En tal caso, obtense a EDO:

$$\frac{db}{dt} = 3{,}5 - 0{,}019\, b.$$

   a) Para unha cantidade inicial de 100 toneladas de biomasa, resolve o PVI formulado.

   b) Comproba que a expresión que devolve MATLAB é a solución do PVI.

   c) Obtén a gráfica da función b, co eixo horizontal entre 0 e 100 e o eixo vertical entre 0 e 300; salva a figura obtida na túa carpeta.

   d) Calcula a biomasa límite (biolim). Comproba que a función constante $b(t) = \text{biolim}$ é unha solución da EDO formulada. Represéntaa graficamente, na anterior ventá, con trazo discontinuo azul.

   e) Calcula, empregando o comando `solve`, o tempo que debe transcorrer para que a cantidade de biomasa sexa de 150 toneladas; aproxima dito valor co comando `ginput`.

2. Supón que un estudante portador dun virus de gripe regresa a un campus universitario illado que ten 1000 estudantes e que a velocidade de propagación do virus é proporcional non só ao número de estudantes contaxiados, senón tamén ao número de alumnos non contaxiados. En tal caso, obtense o PVI:

$$\begin{cases} p' = kp(1000 - p), \\ p(0) = 1. \end{cases}$$

   a) Resolve dito PVI.

   b) Comproba que a expresión que devolve MATLAB é a solución do PVI.

   c) Emprega o comando `solve` para achar k, se se observa que despois de 4 días o número de contaxiados é de 50.

   d) Obtén a gráfica da función p no intervalo $[0, 10]$ e salva a figura obtida na túa carpeta.

   e) Calcula a poboación límite.

   f) Determina o número de estudantes contaxiados despois de 6 días.

   g) Emprega o comando `solve` para deducir cando crecerá máis rapidamente a poboación contaxiada; aproxima dito valor co comando `ginput`.